UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2016/1
Prova da área IB

1 - 6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt) + b_n\,\text{sen}(w_nt)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt,$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\text{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt},$ onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} (A(w)\cos(wt) + B(w)\,\text{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\int_0^\infty xe^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\operatorname{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \|m\|\frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(ax)\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$

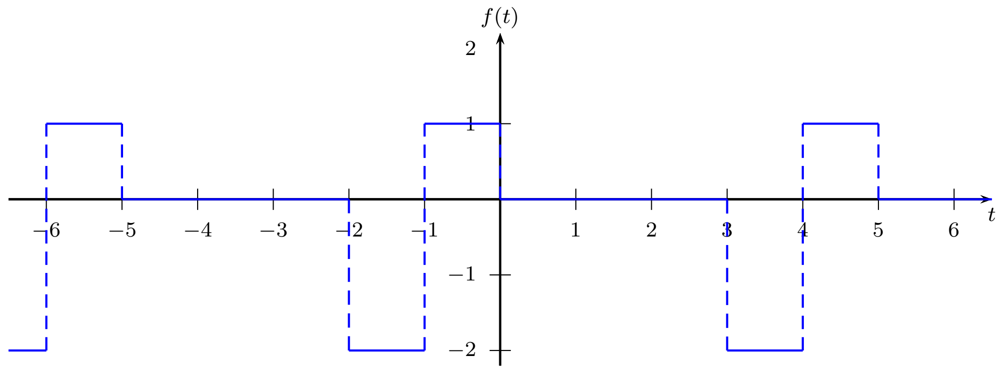
Frequências das notas musicais em Hertz:

Nota \ Escala	1	2	3	4	5	6
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$

• **Questão 1** (1.0 pontos) Considere a função periódica dada pelo gráfico abaixo:



Sobre a série de Fourier da $f(t)$, dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n t)\right)$$

é correto afirmar que

( ) $a_0 = -\frac{2}{5}$

( ) $a_0 = -\frac{1}{5}$

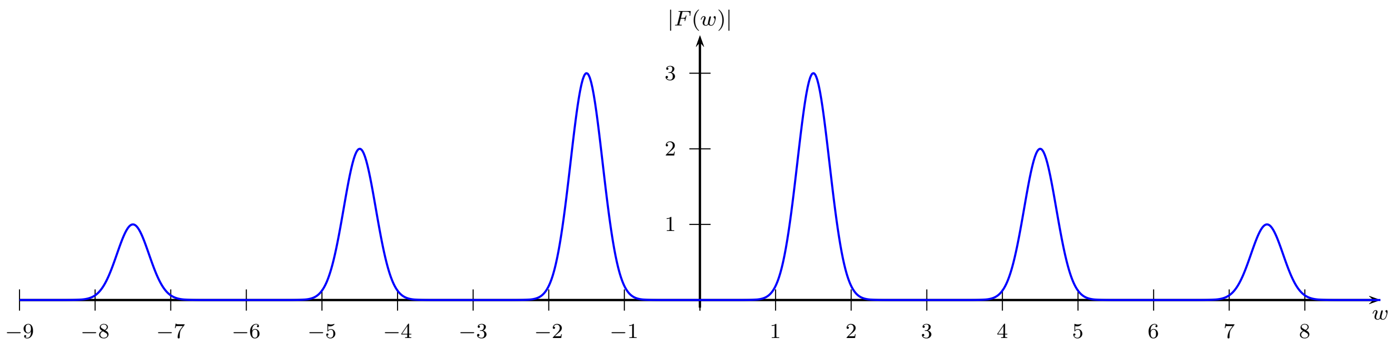
( ) $a_0 = -1$

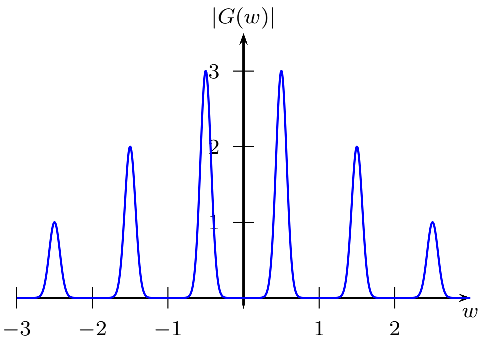
( ) $a_0 = 0$

( ) $a_0 = -\frac{1}{2}$

( ) $a_0 = -\frac{1}{4}$

• **Questão 2** (1.0 pontos) Considere o diagrama de espectro de magnitudes de duas função $f(t)$ e $g(t)$ dados nos gráficos abaixo, onde $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$ e $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(w)$:





É correto afirmar que os diagramas são compatíveis com:

( ) $f(t) = g(3t)$.

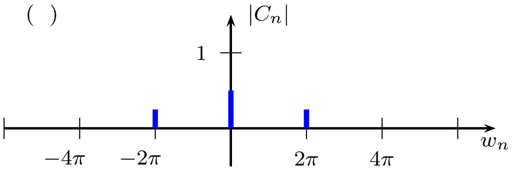
( ) $g(t) = f(3t)$.

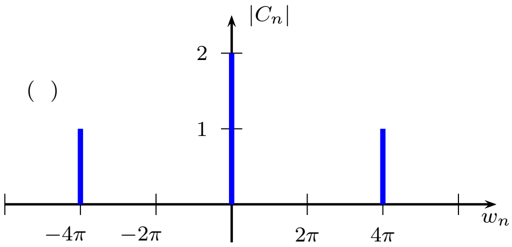
( ) $f(t) = 3g(3t)$.

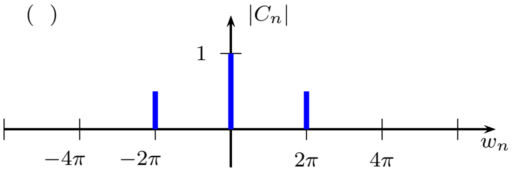
( ) $g(t) = 3f(3t)$.

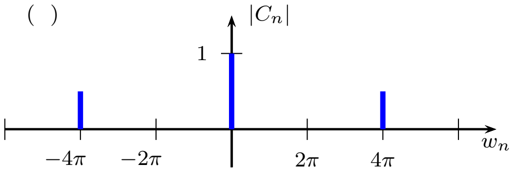
( ) $f(t) = g\left(\frac{t}{3}\right)$.

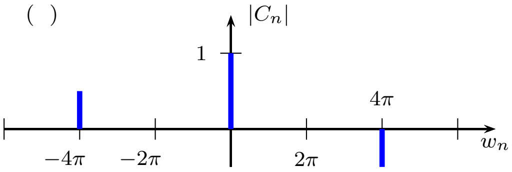
• **Questão 3** (1.0 pontos) O diagrama de espectro de magnitudes da função $f(x) = 2\,\mathrm{sen}^2(2\pi t)$ é

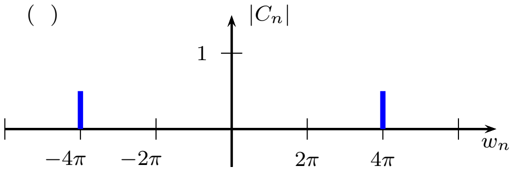
( ) 

( ) 

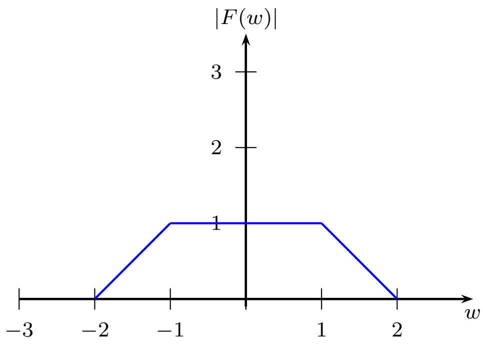
( ) 

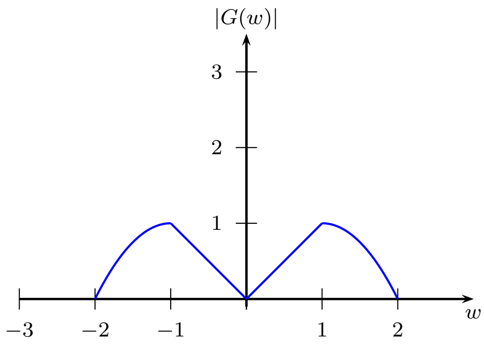
( ) 

( ) 

( ) 

• **Questão 4** (1.0 pontos) Considere os diagramas de espectro de magnitudes das funções $f(t)$ e $g(t)$, onde $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$ e $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(w)$:





É correto afirmar que os diagramas são compatíveis com:

( ) $g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$.

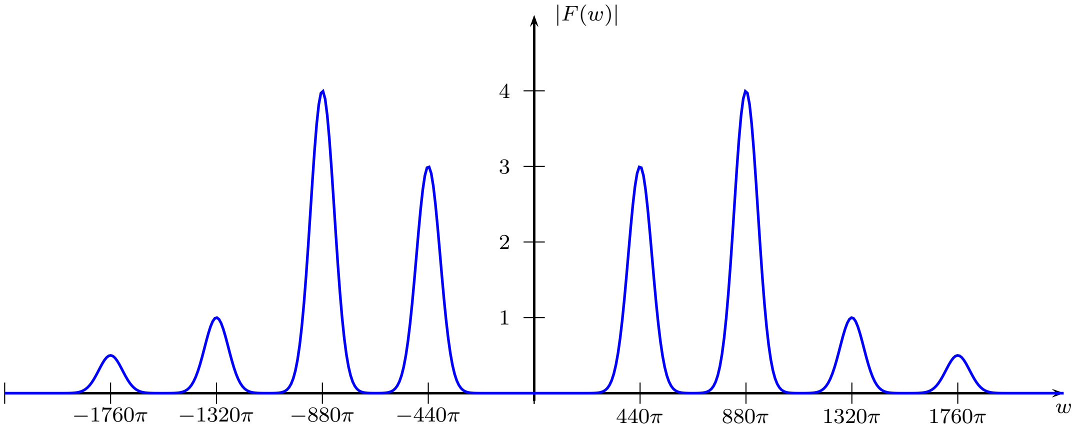
( ) $g(t) = f'(t)$.

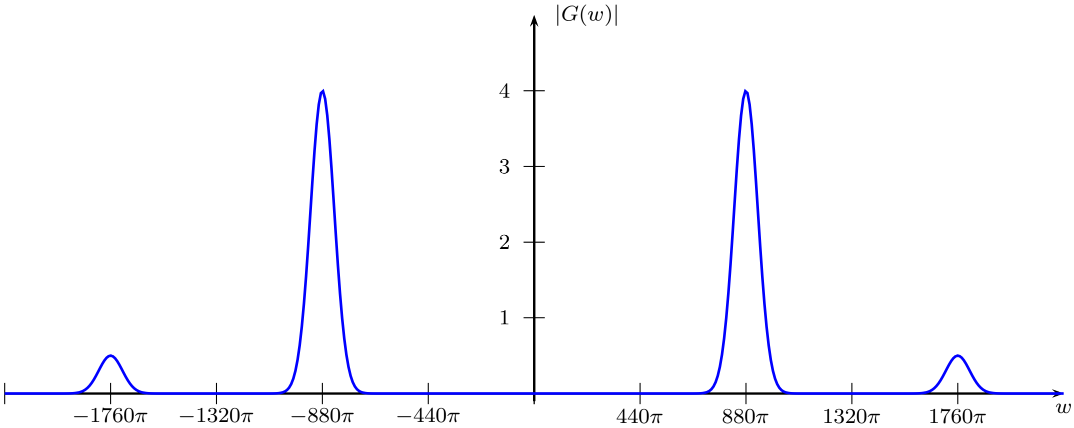
( ) $g(t) = f(t)\cos(t)$.

( ) $g(t) = tf(t)$.

( ) $g(t) = f''(t)$.

- **Questão 5** (1.0 pontos) Os gráficos abaixo apresentam os diagramas de magnitudes do registro de sons.





Assinale a alternativa correta.

( ) $|F(w)|$ e $|G(w)|$ representam a mesma nota, o Lá da escala 2 (220Hz), mas com diferentes timbres.

( ) $|F(w)|$ e $|G(w)|$ representam a mesma nota, o Lá da escala 3 (440Hz), mas com diferentes timbres.

( ) $|F(w)|$ representa a nota Lá da escala 2 (220Hz) e $|G(w)|$ representa a nota Lá da escala 3 (440Hz).

( ) $|F(w)|$ representa a nota Lá da escala 3 (440Hz) e $|G(w)|$ representa a nota Lá da escala 4 (880Hz).

( ) $|G(w)|$ representa a nota Lá da escala 3 (440Hz) e $|F(w)|$ representa a nota Lá da escala 2 (220Hz) tocada juntamente com a nota Sol da escala 3 (392Hz).

- **Questão 6** (1.0 pontos) Assinale a alternativa **FALSA**:

( ) $\delta(t-a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw(t-a)}dw.$

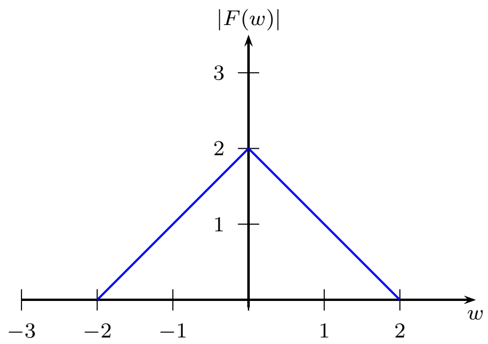
( ) $\delta(t-a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw(t-a)}dw.$

( ) $\delta(t-a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(w(t-a))dw.$

( ) $\delta(t-a) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos(w(t-a))dw.$

( ) $\delta(t-a) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty} \mathrm{sen}(w(t-a))dw.$

• **Questão 7** (2.0 pontos) Seja $f(t)$ uma função real cujo diagrama de espectro é dado a seguir:



Esboce o diagrama de magnitudes de espectro das funções $g(t) = f(t)\cos(3t)$ e $h(t) = f'(t)$. Indique no esboço os eixos com escala e os pontos notáveis, tais como mínimos e máximos.

• **Questão 8** Resolva o problema de difusão de calor dado pela equação diferencial abaixo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\[2ex] u(x,0) = \operatorname{sen}(10x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$