Lista 5 de Exercícios – Variáveis Complexas

Questão 1

Obtenha a série de Laurent de

a. $f(z) = \frac{e^z cozz}{z^3}$ em $z = 0$
b. $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z^3+2)}$ em $z = -1$

Questão 2

Ache as singularidades isoladas das S.L abaixo e identifique o tipo de singularidade
a. $\frac{e^z-1}{z}$
b. $\frac{z-cosz}{z}$
c. $\frac{1}{z^2(z-3)}$
d. $cscz$

Questão 3

Seja $A(z), B(z)$ analíticos em $z = z_0$, $A(z_0) \neq 0$ e $B(z)$ tem zero de ordem N em z_0, então

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0+a_1(z-z_0)+...}{b_N(z-z_0)^N+b_N+1(z-z_0)^{N+1}+...}$$

tem polo de ordem N em z_0. Mostre que a parte principal de $f(z)$ em z_0 é

$$\frac{a_0}{b_N}\frac{1}{(z-z_0)^N} + \frac{a_1b_N-a_0b_{N+1}}{b_N^2}.\frac{1}{(z-z_0)^{N-1}} + ...$$

e ache o próximo termo explicitamente.

Questão 4

Calcule:

a. $\int_{|z|=2} \frac{z}{z^4-1}dz$
b. $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$

Questão 5

Mostre :
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \quad (n \in \mathbb{R})$$

Questão 6
Seja $f(z)$ contínua num disco fechado unitário e holomorfa no disco unitário. Prove a fórmula Integra de Poisson

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2rcos(t-\theta)+r^2} d\theta$$

onde $a = re^{\imath t}, \ 0 \leq r < 1$.

(sugestao: observe que $\int_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z-\frac{1}{\bar{a}}} dz = 0$, e segue que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{C(0,1)} f(z) (\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\frac{1}{\bar{a}}}) dz.$$