Lista 7 de Exercícios – Variáveis Complexas

Questão 1
Mostre que

$\int_0^\infty \frac{lnx}{x^2+1}dx \;=\; 0$

e

$\int_0^\infty \frac{lnx}{(x^2+1)^2}dx \;=\; -\frac{\pi}{4}$.

Questão 2
Mostre que:

$\int_0^\infty \frac{logx}{x^2+a^2}dx \;=\; \frac{\pi}{2a}log\, a$

Questão 3
Mostre que
$\int_0^\infty \frac{x^p}{x^2+1}dx \;=\; \pi\frac{sen\frac{p\pi}{2}}{senp\pi} \quad (-1 \;<\; p \;<\; 1)$

Questão 4
(Teorema do Máximo) Mostre que se f é função holomorfa não constante em região Ω, aberta, então f não assume máximo em Ω.

Questão 5
Ache o número de zeros da função $f(z) \;=\; 2z^5 \,+\, 7z^3 \,+\, z^2 \,-\, 3$ no anel $1 < |z| < 2$.

Questão 6
Mostre que a função $f(z) \;=\; ze^{3-z}-1$ tem somente um zero no disco unitário D(0,1).

Questão 7
Sejam as raizes de $(z-1)^n \,+\, z^n \;=\; 0$ denotadas por z_k , $k = 0, 1, ..., n-1$. Mostre que todas raizes z_k estão sobre a reta $x = 1/2$.

Questão 8
Ache quantas soluções a equação $z^6 + 6z + 10 = 0$ tem em cada quadrante.

Questão 9
Seja f uma função não constante e holomorfa em um conjunto aberto contendo o disco fechado unitário. Mostre que se $|f(z)| = 1$ quando $|z| = 1$, então a imagem de f contém o disco unitário. [Dica: Mostre que $f(z) = w_0$ tem uma raiz para cada $w_0 \in D$. Para isto, é suficiente mostrar que $f(z) = 0$ tem uma raiz. (Por que?). Use o Principio do Maximo para esta conclusão.]

Questão 10
Seja $\triangle$ um triângulo equilátero fechado no plano, com vértices a,b, e c.
Calcule $\max(|z-a|\,|z-b|\,|z-c|)$ para $z \in \triangle$.