Lista 2 de Exercícios – Variáveis Complexas

Questão 1
Suponha que a função$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ é diferenciável em $z_0 = r_0 exp(i\theta_0)$.
a. Mostre que $f'(z_0)$ pode ser escrito $f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$ onde u_r e v_r.
b. Mostre que u, v satisfazem condiçõesde Cauchy-Riemann na forma polar

$$u_r = \frac{1}{r}\,v_\theta \quad \frac{1}{r}\,u_\theta = -\,v_r$$

Questão 2
Seja a função$f(z)$ holomorfa em domínio D. Mostre que $f(z)$ deve ser constante em D se:
a. $f(z)$ é real para todo z em D;
b. $\overline{f(z)}$ é holomorfa em D;
c. $|f(z)|$ é constante em D.

Questão 3
Ache todos os valores de z tal que :
a. $e^z = -2$
b. $cos z = 3$
c. $e^{2z-1} = 1$

Questão 4
Mostre que $|\,sin\,z\,| \geq |\,sin\,x\,|$.

Questão 5
Mostre que u é harmônica em algum domínio e ache o harmônico conjugado $v(x,y)$ quando
a. $u(x,y) = 2x(1 - y)$
b. $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

Questão 6
Mostre que $f'(z)$ não existe para nenhum z se
a. $f(z) = \bar{z}$
b. $f(z) = 2x + i\,xy^2$

Questão 7
Mostre que

$$Re(log(z - 1)) = \frac{1}{2}\,ln[(x-1)^2 + y^2]$$

Questão 8
Calcule:
a. $(1+i)^i$
b. $(-1)^{\frac{1}{\pi}}$
c. i^i
d. $(1-i)^{4i}$

Questão 9
Assumindo que $f'(z)$ existe, ache $\frac{d}{dz}[c^{f(z)}]$.