

SISTEMAS MATRICIAIS EVOLUTIVOS UTILIZANDO A RESPOSTA IMPULSO MATRICIAL E MATRIZ DE TRANSFÊRENCIA

Julio Cesar Ruiz Claeysen

2004

Instituto de Matemática / PROMEC
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
90001-000, Porto Alegre, RS, Brasil
e-mail : julio@mat.ufrgs.br

Sumário

1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES	1
1.1	Introdução	1
1.2	Representação integral da solução	3
1.2.0.1	Resposta Impulso e Função de Transferência	7
1.2.1	A Função do Sistema através de Entradas Exponenciais	9
1.2.2	Equação adjunta temporal	10
1.2.3	Transformação de Hamilton e Representação no Espaço de Estado para Sistemas Lineares de Ordem Superior	19
1.3	Teoremas Fundamentais	21
1.4	Cálculo das soluções	22
1.4.1	Métodos Espectrais	23
1.4.1.1	Caso Homogêneo	24
1.4.1.2	Caso não-homogêneo	25
1.4.1.3	Métodos Não-Espectrais	27
2	SISTEMAS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM	30
2.1	Funções Matriciais	30
2.2	Definição Equivalente de Funções Matriciais	34
2.3	Teorema de Redução Polinomial	38

2.4	Extensão da Definição de Funções Matriciais	41
2.5	Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem	43
2.5.0.4	Cálculo de e^{tA}	45
2.6	Sistemas de Equações Diferenciais de Segunda Ordem: Caso Conservativo	47
2.6.1	Caso Homogêneo	47
2.6.2	Caso Não-Homogêneo	49
2.6.3	Frequências naturais e modos de vibração	50
2.6.4	Expansão em modos normais na resposta-impulso	58
2.6.5	Expansão em modos normais na matriz de transferência	60
2.7	Sistemas de Segunda Ordem: Caso Geral	61
2.7.1	Fórmulas fechadas para a resposta-impulso	64
2.7.1.1	O caso de raízes simples	66
2.7.2	Exemplos numéricos	67
2.7.2.1	Formulação de Estado	72
3	EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS LINEARES	76
3.1	Introdução	76
3.2	Representação das Soluções	78
3.2.1	Formulação no Espaço de Estado	82
3.3	Cálculo das Soluções	85

3.3.1	Método Espectral	85
3.3.1.1	Métodos Não-Espectrais	88
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93

1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

1.1 Introdução

O estudo das equações de ordem N

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) = f(t), \quad (1.1)$$

onde os coeficientes A_j são matrizes escalares constantes (*independentes do tempo*) de ordem $n \times n$, $u = u(t)$ a *função incógnita* e $r(t)$ o termo não-homogêneo ou excitação de ordem $n \times 1$, pode ser feito de maneira direta, inferindo resultados a partir do que é desenvolvido para equações de primeira e segunda ordem, ou, de maneira indireta com o uso da formulação de estado que reduz uma equação de ordem N para uma de primeira ordem. Isto último é encontrado na literatura, daí que nossa ênfase seja, na medida do possível, de forma direta. Para tanto, serão utilizados os três princípios das equações lineares, enunciados a seguir.

Nas aplicações, usualmente $r(t)$ pode ser de natureza forçante, isto é, denotar um termo simples

$$f(t) = r(t), \quad (1.2)$$

ou um termo que descreva uma dinâmica de controle

$$f(t) = \sum_{j=0}^M B_j \frac{d^j z}{dt^j}(t), \quad (1.3)$$

onde os coeficientes B_j são constantes e $z = z(t)$ denota a variável de controle.

Com o propósito de considerar ambos tipos de sistemas, pode ser assu-

mido que $f(t)$ é uma combinação de ambos, ou seja,

$$f(t) = \sum_{j=0}^M B_j \frac{d^j z}{dt^j}(t) + r(t). \quad (1.4)$$

1. PRINCÍPIO DA DECOMPOSIÇÃO

A solução da equação linear não-homogênea pode ser decomposta na soma de uma solução homogênea geral e uma solução não-homogênea particular. Assim, a solução de (1.1) pode ser escrita

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t),$$

onde u_h é solução da equação homogênea

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) = 0, \quad (1.5)$$

e u_p uma solução particular da equação não-homogênea (1.1).

2. PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

- A combinação linear de soluções homogêneas é solução homogênea.
- Se o termo não-homogêneo é uma combinação linear de funções $\alpha f + \beta g$, então a solução é a combinação linear com as soluções correspondentes as funções, isto é, $\alpha u_f + \beta u_g$.

3. PRINCÍPIO DA REPRESENTAÇÃO

Existe uma solução fundamental que carrega toda a informação de uma equação diferencial linear.

Este último princípio será mostrado de maneira formal, através da obtenção de uma fórmula de variação de parâmetros com o uso do método operacional da transformada de Laplace e supondo o caso *regular* em que a matriz A_N é não-singular. A

validade dessa metodologia será posteriormente estabelecida de maneira rigorosa.

1.2 Representação integral da solução

A solução do problema inicial

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) = f(t), \quad (1.6)$$

$$u(0) = u_o, \quad \frac{du}{dt}(0) = \dot{u}_o, \quad \dots, \quad \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}(0) = u_o^{(N-1)}, \quad (1.7)$$

pode ser formulada através da transformada de Laplace. Aplicando-se então, a transformada de Laplace em (1.1) resulta a equação operacional

$$\left(\sum_{j=0}^N s^j A_j \right) U(s) - \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i = F(s), \quad (1.8)$$

onde $u_0^i = u^{(i)}(0)$ denota as condições iniciais da saída no tempo $t = 0$. As expressões

$$U(s) = \int_{0+}^{\infty} e^{-st} u(t) dt, \quad F(s) = \int_{0+}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.9)$$

correspondem às transformadas da saída $u(t)$ e do termo forçante $r(t)$, respectivamente ¹.

Assim, a transformada da saída pode ser expressa por

$$U(s) = H(s) \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j u_0^i \right) + H(s) F(s), \quad (1.10)$$

¹O limite inferior 0^+ indica que os valores iniciais serão incorporados as transformadas das derivadas de uma saída em repouso para $t < 0$. Este não é o caso quando se considera 0^- como limite inferior. Para maiores detalhes veja-se [Lanczos, 1956].

onde

$$H(s) = \left(\sum_{j=0}^N s^j A_j \right)^{-1}, \quad (1.11)$$

é denominada *função do sistema* representado pela equação (1.1).

A inversa da transformada de Laplace da matriz $H(s)$ é chamada de *resposta a um impulso* do sistema (1.1), sendo denotada por $h(t)$. Ela vem a ser uma matriz de ordem n que satisfaz, para $t > 0$, o sistema

$$\sum_{j=0}^N A_j h^{(j)}(t) = 0, \quad (1.12)$$

sujeito as condições iniciais

$$h(0^+) = 0, \quad \dot{h}(0^+) = 0, \dots, \quad h^{(N-2)}(0^+) = 0, \quad A_N h^{(N-1)}(0^+) = I. \quad (1.13)$$

Como $H(s)$ é a inversa do polinômio matricial $\Delta(s)$, dado por

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^N s^j A_j, \quad (1.14)$$

segue-se que $h(t)$ é uma solução à esquerda e à direita, isto é,

$$\sum_{j=0}^N A_j h^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^N h^{(j)}(t) A_j = 0. \quad (1.15)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace em (1.10) e, utilizando-se o fato de que

$$\mathcal{L}(h^{(j)}(t)) = s^j H(s), \quad \text{para } j = 0 : N-1, \quad (1.16)$$

devido as condições iniciais de $h(t)$ obtêm-se uma expressão para a resposta total do sistema (1.1), em termos da resposta a um impulso associado ao sistema. A saída é

então dada por

$$u(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t) A_j u_0^i + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (1.17)$$

O primeiro termo do segundo membro corresponde a resposta livre do sistema e o último vem a ser a resposta forçada. A resposta é expressa em função das condições iniciais e da entrada do sistema (1.1).

Introduzindo-se as funções matriciais

$$h_j(t) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^{(i)}(t) A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N-1, \quad (1.18)$$

as quais podem ser denotadas matricialmente por

$$\begin{pmatrix} h_0(t) & h_1(t) & \cdots & h_{N-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(t) & \dot{h}(t) & \cdots & h^{(N-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_N \\ A_2 & A_3 & \cdots & A_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{N-1} & A_N & 0 & \cdots & 0 \\ A_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

a saída pode ser expressa de maneira explícita em relação aos valores iniciais, ou seja,

$$u(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t) u_0^j + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (1.20)$$

Deve ser salientado que se os coeficientes A_k são matrizes simétricas, então a solução $h(t)$ é também uma matriz simétrica. Para isto utiliza-se o fato que $h(t)$ é solução pela esquerda e pela direita.

OBSERVAÇÕES

1. A rigor, as fórmulas (1.17) ou (1.20) são válidas, em princípio, para $t \geq 0$. Porém, pela teoria de equações diferenciais ordinárias, é conhecido que a solução $h(t)$ do problema de valor inicial é única e definida para

todo valor de t . Dai que, por direta substituição em (1.1), verifica-se que

$$u(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t) A_j u_0^i + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.21)$$

é a solução de (1.1), com condições iniciais dadas em $t = 0$ e $f(t)$ atuando em todo instante de tempo t real. Similarmente,

$$u(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t) u_0^j + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.22)$$

2. Como os sistemas considerados possuem coeficientes constantes são isto é, autônomos, eles possuem a seguinte propriedade: para qualquer translação do tempo em $f(t)$, tem-se que a forma da saída é a mesma; porém, com a mesma translação aplicada no tempo. Dai que, as soluções com valores iniciais num tempo arbitrário t_0 podem ser expressas pela *fórmula de variação de parâmetros* dada por (1.21), pode ser escrita por

$$u(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t-t_0) u^{(j)}(t_0) + \int_{t_0}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.23)$$

para valores de t dentro do intervalo de atuação de $f(t)$.

3. Deve ser salientado que no caso de sistemas onde os coeficientes variam com o tempo, uma solução e suas derivadas nem sempre formam uma base [Howland, 1911]. Porém, a solução fundamental $h(t, \tau)$ de um sistema linear variante no tempo gera sempre uma base de soluções, veja-se [Miller, 1963].

EXERCÍCIO

Seja $H(s) = (sI - A)^{-1}$ a função do sistema de primeira ordem $\dot{u} = Au$. Escrever

formalmente $H(s)$ como uma série geométrica, inverter por transformada de Laplace termo a termo, e obter que

$$h(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \quad (1.24)$$

EXERCÍCIO

Seja $H(s) = (s^2 I + A)^{-1}$ a função do sistema de segunda ordem $\ddot{u} + Au = 0$. Escrever formalmente $H(s)$ como uma série geométrica, inverter por transformada de Laplace termo a termo, e obter que

$$h(t) = \frac{\text{sen}(t\sqrt{A})}{\sqrt{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} A^k}{(2k+1)!} \quad (1.25)$$

Uma justificativa rigorosa desses exercícios será dada com o uso de funções matriciais.

EXERCÍCIO

Refazer os exercícios anteriores com os sistemas $S\dot{u} + Ru = 0$ e $M\ddot{u} + Ku = 0$ para obter a correspondente solução fundamental $h(t)$.

1.2.0.1 Resposta Impulso e Função de Transferência

No caso de sistemas de controle em que $f(t)$ é dado pela expressão

$$f(t) = \sum_{j=0}^M B_j \frac{d^j z}{dt^j}(t), \quad (1.26)$$

conforme descrito em (1.3), a resposta forçada

$$\int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

pode ser explicitada em termos de z e de seus valores iniciais. Integrando-se por partes, e utilizando-se os valores iniciais de $h(t)$ resulta que

$$\int_0^t h(t-\tau) \left(\sum_{j=0}^M B_j \frac{d^j z}{dt^j}(\tau) \right) d\tau = \int_0^t g(t-\tau) z(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t) B_j z_0^i, \quad (1.27)$$

onde

$$g(t-\tau) = \sum_{j=0}^M h^{(j)}(t-\tau) B_j, \quad (1.28)$$

sendo $z_0^i = z^{(i)}(0)$ os valores iniciais do controle. A função $g(t) = g$ será referida como a *resposta impulso* do sistema de controle. Assim, a solução do problema de valor inicial

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) = f(t) + \sum_{j=0}^M B_j \frac{d^j z}{dt^j}(t), \quad (1.29)$$

$$u(0) = u_o, \quad \frac{du}{dt}(0) = \dot{u}_o, \quad \dots, \quad \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}(0) = u_o^{(N-1)}, \quad (1.30)$$

é dada pela fórmula de variação de parâmetros

$$\begin{aligned} u(t) = & \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t) A_j u_0^i + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \\ & - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t) B_j z_0^i + \int_0^t g(t-\tau) z(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.31)$$

onde $g(t)$ é dada por (1.28).

EXERCÍCIO

Mostrar que expressão (1.28) pode também ser obtida através do cálculo da transformada inversa de Laplace.

Diante de condições iniciais nulas, tanto da entrada quanto da saída tem-se, a partir de (1.10), que

$$U(s) = G(s)U(s), \quad (1.32)$$

onde

$$G(s) = H(s) \sum_{j=0}^M s^j B_j = \sum_{j=0}^M s^j H(s) B_j, \quad (1.33)$$

é a *função de transferência* do sistema de controle, relacionando-se as transformadas da entrada e da saída. Aplicando-se a transformada inversa de Laplace na equação (1.33) e utilizando-se a propriedade (1.16) obtêm-se a *resposta impulso* (1.28) do sistema.

Caso as condições iniciais da entrada e da saída sejam nulas ($u_0^j = 0$ e $u_0^j = 0$), a resposta forçada do sistema pode ser expressa através da convolução

$$u(t) = \int_0^t g(t - \tau) z(\tau) d\tau. \quad (1.34)$$

1.2.1 A Função do Sistema através de Entradas Exponenciais

A equação

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) = e^{t\lambda} w, \quad (1.35)$$

possui uma solução do tipo exponencial $u(t) = e^{st} v$ com v um vetor não-nulo, quando o sistema algébrico

$$\left(\sum_{j=0}^N A_j s^j \right) v = w, \quad (1.36)$$

possui solução para v . Assim,

$$v = \left(\sum_{j=0}^N A_j s^j \right)^{-1} = H(s)w \quad (1.37)$$

desde que o determinante do sistema algébrico seja não-nulo.

Por outro lado, o sistema homogêneo

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) = 0, \quad (1.38)$$

admite soluções do tipo exponencial $u(t) = e^{\lambda t}v$ com v um vetor não-nulo, quando o sistema algébrico homogêneo

$$\left(\sum_{j=0}^N A_j \lambda^j \right) v = 0, \quad (1.39)$$

possui solução não-nula. Isto é o caso, se e somente se, o determinante do sistema

$$P(\lambda) = \det \left[\sum_{j=0}^N A_j \lambda^j \right] \quad (1.40)$$

é nulo. Neste caso λ é referido como sendo *autovalor* do sistema e v o correspondente *autovetor*.

Assim, a função do sistema $H(s)$ está bem definida desde que s não seja autovalor do sistema.

1.2.2 Equação adjunta temporal

A fórmula de variação de parâmetros, pode, também, ser obtida pelo método de Lagrange-Riemann, que consiste em utilizar $h(t-\tau)$ como fator integrante. Multiplica-se ambos membros da equação (1.6) no tempo τ por $h(t-\tau)$, integra-se

com respeito de τ , e aplica-se os valores iniciais de $h(t)$ e o fato que é solução a esquerda (1.15).

Diante da presença de autovalores complexos numa matriz quadrada A escalar, real ou complexa, é conveniente o uso do produto interno unitário

$$\langle a, b \rangle = a^* b, \quad a^* = \bar{a}^T \quad (1.41)$$

para vetores coluna $n \times 1$ com componentes complexas. No caso de vetores com componentes reais, este produto coincide com o produto interno real $a^T b$. A rigor, esses produtos somente diferem na propriedade de simetria complexa

$$\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$$

ou

$$\bar{a}^T b = b^T \bar{a}.$$

Assim, para uma constante α ,

$$\langle a, \alpha b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle, \quad \langle \alpha a, b \rangle = \bar{\alpha} \langle a, b \rangle.$$

Para uma matriz real A e sua transposta A^T , verifica-se a relação

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^T v, u \rangle.$$

Também, se $Au = \lambda u$, então

$$\langle v, Au \rangle = \langle v, \lambda u \rangle = \bar{v}^T \lambda u = \lambda \bar{v}^T u.$$

As seguintes propriedades são válidas para matrizes reais:

1. Uma matriz quadrada real A e sua transposta A^T possuem os mesmos autovalores.

2. Se $A^T w = \alpha w$ e $Av = \beta v$ com $\alpha \neq \beta$, então $w^T v = 0$.
3. Para qualquer solução w da equação adjunta $\dot{w}(t) = -A^T w(t)$, o produto $w^T z$ é constante para cada solução z de (??).

Entretanto, para uma matriz complexa A , verifica-se

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle \quad (1.42)$$

onde $A^* = \overline{A}^T$ é chamada matriz adjunta de A . As seguintes propriedades são válidas para matrizes quadradas escalares:

1. Os autovalores de uma matriz A e de A^* são complexos conjugados.
2. *Bi-ortogonalidade.* Os autovetores de A e A^* correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

A seguir, considerem-se os sistemas homogêneos de primeira e segunda ordem, respectivamente, com coeficientes constantes

$$S\dot{u} + Ru = f(t) \quad (1.43)$$

e

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t). \quad (1.44)$$

onde os coeficientes S , R , M , C e K são matrizes de ordem $n \times n$, e u é um vetor de ordem $n \times 1$. Os sistemas acima serão considerados sempre regulares, ou seja, S no sistema de primeira ordem e M no sistema de segunda ordem são não-singulares.

Usando o produto interno com os sistemas de primeira e segunda ordem

$$S\dot{u} + Ru = f(t) \quad (1.45)$$

e

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t), \quad (1.46)$$

tem-se

$$\langle v, S\dot{u} \rangle + \langle v, Ru \rangle = \langle v, f \rangle$$

e

$$\langle v, M\ddot{u} \rangle + \langle v, C\dot{u} \rangle + \langle v, Ku \rangle = \langle v, f \rangle,$$

respectivamente

Integrando as duas equações acima de a a b , decorre

$$\int_a^b [\langle v, S\dot{u} \rangle + \langle v, Ru \rangle] d\tau = \int_a^b \langle v, f \rangle d\tau$$

e

$$\int_a^b [\langle v, M\ddot{u} \rangle + \langle v, C\dot{u} \rangle + \langle v, Ku \rangle] d\tau = \int_a^b \langle v, f \rangle d\tau.$$

Para os termos com derivadas, observe-se que para uma matriz quadrada A , tem-se

$$\int_a^b \langle v, A\dot{u} \rangle d\tau = \langle A^*v, u \rangle|_a^b - \int_a^b \langle A^*\dot{v}, u \rangle \quad (1.47)$$

$$\int_a^b \langle v, A\ddot{u} \rangle d\tau = \langle A^*v, \dot{u} \rangle|_a^b - \langle A^*\dot{v}, u \rangle|_a^b + \int_a^b \langle A^*\ddot{v}, u \rangle. \quad (1.48)$$

EXERCICIO

a) Verificar, integrando por partes, a validade das relações (1.47) e (1.48) para a primeira e segunda derivada em u . Assuma que u e v são diferenciáveis.

b) Generalize para n -ésima derivada em u .

Assim, para os sistemas de primeira e segunda ordem, verifica-se no intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b \langle v, f \rangle d\tau = \int_a^b \langle v, l(u) \rangle d\tau = \int_a^b \langle l^*(v), u \rangle d\tau + B(v, u), \quad (1.49)$$

onde

$$l(u) = \begin{cases} S\dot{u} + Ru, & \text{primeira ordem} \\ M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku, & \text{segunda ordem} \end{cases}, \quad (1.50)$$

$$l^*(v) = \begin{cases} -S^*\dot{v} + R^*v, & \text{primeira ordem} \\ M^*\ddot{v} - C^*\dot{v} + K^*v, & \text{segunda ordem} \end{cases}, \quad (1.51)$$

e

$$B(v, u) = \begin{cases} \langle S^*v, u \rangle|_a^b & \text{primeira ordem} \\ (\langle M^*v, \dot{u} \rangle - \langle M^*\dot{v}, u \rangle + \langle C^*v, u \rangle)|_a^b & \text{segunda ordem} \end{cases}. \quad (1.52)$$

A seguir, focalizamos a metodologia com a equação de segunda ordem. Suponha-se que $h(t)$ denota a solução fundamental associada com a equação não-homogênea (1.46), isto é,

$$M\ddot{h}(t) + C\dot{h}(t) + Kh(t) = \ddot{h}(t)M + \dot{h}(t)C + h(t)K = 0 \quad (1.53)$$

$$h(0) = 0, \quad M\dot{h}(0) = \dot{h}(0)M = I, \quad (1.54)$$

onde a segunda equação vem da propriedade (1.15). Para um t arbitrário e fixo, considere-se

$$v(\tau) = h^*(t - \tau), \quad (1.55)$$

de modo que

$$\dot{v}(\tau) = \frac{\partial h^*(t-\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial \dot{h}^*(t-\tau)}{\partial t}, \quad (1.56)$$

$$\ddot{v}(\tau) = \frac{\partial^2 h^*(t-\tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \dot{h}^*(t-\tau)}{\partial t^2}. \quad (1.57)$$

De (1.51) tem-se,

$$l^*(v(\tau)) = M^*\ddot{v}(\tau) - C^*\dot{v}(\tau) + K^*v(\tau) = M^*\ddot{h}^*(t-\tau) + C^*\dot{h}^*(t-\tau) + K^*h^*(t-\tau) \quad (1.58)$$

onde \dot{h} significa derivação com respeito de t . Assim,

$$\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t \langle l^*(h^*(t-\tau)), u(\tau) \rangle d\tau + B(h^*, u) \quad (1.59)$$

onde o termo a direita

$$\int_0^t \left(M^* \frac{\partial^2 h^*(t-\tau)}{\partial \tau^2} - C^* \frac{\partial h^*(t-\tau)}{\partial \tau} + K^* h^*(t-\tau) \right)^* u(\tau) d\tau + B(h^*, u)$$

pode ser reduzido para

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(M^* \ddot{h}^*(t-\tau) + C^* \dot{h}^*(t-\tau) + K^* h^*(t-\tau) \right)^* u(\tau) d\tau + B(h^*, u) \\ &= \int_0^t \left[\ddot{h}(t-\tau)M + \dot{h}(t-\tau)C + h(t-\tau)K \right] u(\tau) d\tau + B(h^*, u). \end{aligned}$$

Como $h(t)$ é solução a direita e pela esquerda (1.53), a integral no termo a direita da igualdade é nulo. Por outro lado, utilizando as condições iniciais de $h(t)$ vem

$$\begin{aligned}
 B(h^*, u) &= \langle M^* h^*(t - \tau), \dot{u} \rangle - \langle M^* (-\dot{h}^*(t - \tau)), u \rangle + \langle C^* h^*(t - \tau), u \rangle \Big|_o^t \\
 &= h(t - \tau) M u(\tau) + \dot{h}(t - \tau) M u(\tau) + h(t - \tau) C u(\tau) \Big|_o^t \\
 &= -h(t) M \dot{u}(0) - u(t) - \dot{h}(t) M u(0) - h(t) C u(0).
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

De (1.60) e (1.69) obtém-se a fórmula de variação de parâmetros

$$u(t) = \left(\dot{h} M + h(t) C \right) u(0) + h M \dot{u}(0) + \int_o^t h(t - \tau) f(s) ds, \tag{1.61}$$

para o problema de valor inicial de segunda ordem

$$M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) = f(t) \tag{1.62}$$

$$u(0) = u_o, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_o. \tag{1.63}$$

DEFINIÇÃO

A equação

$$M^* \ddot{w}(t) - C^* \dot{w}(t) + K^* w(t) = 0 \tag{1.64}$$

é dita *equação adjunta temporal* da equação

$$M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) = 0. \tag{1.65}$$

DEFINIÇÃO

A função $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ é chamada de função de Green temporal ou função de Green dinâmica da equação (1.62).

Teorema 1.1. *A função de Green temporal $h(t, \tau)$ da equação (1.62), satisfaz as seguintes propriedades*

1. $h(t, \tau)$ e sua derivada $\frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t}$ são contínuas em \mathbb{R}^2 .
2. $h(\tau, \tau) = 0$
3. $m \frac{\partial h(\tau, \tau)}{\partial t} = I$
4. $M \frac{\partial^2 h(t, \tau)}{\partial t^2} + C \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t} + Kh(t, \tau) = 0$.

Prova

Deixamos como exercício a prova dessas propriedades elementares.

Teorema 1.2. *Seja $h(t)$ a solução fundamental de (1.62) e $h_*(t)$ a solução fundamental da equação adjunta (1.65), isto é,*

$$M^* \ddot{h}_*(t) - C^* \dot{h}_*(t) + K^* h_*(t) = 0 \quad (1.66)$$

$$h_*(0) = 0, \quad M^* \dot{h}_*(0) = I. \quad (1.67)$$

Então, a função de Green temporal adjunta $h_*(t, \tau) = h_*(t - \tau)$ satisfaz

$$h_*(t, \tau) = -h^*(\tau - t) \quad (1.68)$$

Em particular, $h_*(t) = -h^*(-t)$.

Prova

Seja $v = h_*(t - \eta)$ e $u = h(t - \xi)$. De (1.49) com $a = \xi$, $b = \eta$, $\tau = t$, segue que

$$\begin{aligned}
 0 = B(h_*, h) &= \langle M^* h_*(t - \eta), \dot{h}(t - \xi) \rangle - \langle M^* \dot{h}_*(t - \eta), h(t - \xi) \rangle + \langle C^* h_*(t - \eta), h(t - \xi) \rangle \Big|_{t=\xi}^\eta \\
 &= h_*^*(t - \eta) M \dot{h}(t - \xi) - \dot{h}_*^*(t - \eta) M h(t - \xi) + h_*^*(t - \eta) C h(t - \xi) \Big|_{t=\xi}^\eta \\
 &= -h_*^*(\xi - \eta) M \dot{h}(0) - \dot{h}_*^*(0) M h(\eta - \xi).
 \end{aligned}$$

Como η, ξ são arbitrários, segue que $h_*(t-\tau) = -h^*(\tau-t)$. Deixamos como exercício verificar que $h_*(t) = -h(-t)$.

EXERCÍCIO

- a)Mostrar que para uma equação de primeira ordem, as funções de Green temporais (direta e adjunta) satisfazem $h_*(t, \tau) = h^*(\tau, t)$.
- b)Generalize o conceito de equação adjunta para ordem N, bem como a relação que existe entre as funções de Green temporais. x

EXERCÍCIO

- a)Sejam u solução da equação $S\dot{u} + Ru = 0$ e w uma solução da equação adjunta $-S^*\dot{w} + R^*w = 0$. Mostrar que $w^*\dot{S}u = 0$, isto é, w^*Su é constante.
- b) Obter uma propriedade para o caso de soluções u, w da equação $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$ e da sua adjunta, respectivamente.

1.2.3 Transformação de Hamilton e Representação no Espaço de Estado para Sistemas Lineares de Ordem Superior

Em princípio, um sistema de ordem arbitrário

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j y}{dt^j} = f(t), \quad (1.69)$$

sendo os coeficientes A_j matrizes de ordem n ; a solução $u = u(t)$ e o termo não-homogêneo $f(t) = f$ de ordem $n \times 1$, pode ser reduzido para um sistema de primeira ordem.

Defina-se a seqüência de N vetores de ordem n denotados por

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ z_N = y^{N-1} \end{cases}. \quad (1.70)$$

Então a equação (1.69) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{N-1} &= z_N \\ \dot{z}_N &= -A_N^{-1}A_0z_1 - A_N^{-1}A_1z_2 - \cdots - A_N^{-1}A_{N-2}z_{N-1} - A_N^{-1}A_{N-1}z_N + f \end{aligned} \quad (1.71)$$

Colocando-se as N equações na forma matricial resulta uma equação diferencial matricial de primeira ordem denotada por

$$\dot{\mathcal{Z}} = \mathcal{A}\mathcal{Z} + \mathcal{F}, \quad (1.72)$$

onde

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1}f \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_N^{-1}A_0 & -A_N^{-1}A_1 & -A_N^{-1}A_2 & \cdots & -A_N^{-1}A_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (1.73)$$

A matriz \mathcal{A} é chamada de *matriz companheira*, sendo que para este caso a matriz exponencial $e^{t\mathcal{A}}$ pode ser identificada em termos dos elementos da base dinâmica normalizada $[h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]$ para equações de ordem N . Ela é dada pela matriz bloco

$$e^{t\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-2} & h_{N-1} \\ \dot{h}_0 & \dot{h}_1 & \cdots & \dot{h}_{N-2} & \dot{h}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ h_0^{(N-1)} & h_1^{(N-1)} & \cdots & h_{N-2}^{(N-1)} & h_{N-1}^{(N-1)} \end{bmatrix}. \quad (1.74)$$

A prova desta importante propriedade, decorre do fato que o membro a direita, que denotamos por $E(t)$, verifica $E(0)=I$ e $\dot{E}(t) = \mathcal{A}E(t) = E(t)\mathcal{A}$.

Deve-se ser salientado que muitas das propriedades conhecidas para a matriz exponencial podem ser adequadamente transportadas para a base dinâmica.

EXERCÍCIO

Mostrar que $E(t)$ verifica $E(0)=I$, $\dot{E}(t) = \mathcal{A}E(t) = E(t)\mathcal{A}$.

1.3 Teoremas Fundamentais

Nesta seção, será estabelecido rigorosamente a existência da solução fundamental $h(t)$ de um sistema de ordem N como inversa da função do sistema $H(s)$ e a validade da fórmula de variação de parâmetros para a solução do problema de valor inicial. Também, será obtida uma fórmula não-espectral para o cálculo de $h(t)$.

1.4 Cálculo das soluções

As técnicas ou métodos existentes para determinar as soluções do problema de valor inicial

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) = f(t), \quad (1.75)$$

$$u(t_0) = u_o, \quad \frac{du}{dt}(t_0) = \dot{u}_o, \quad \dots, \quad \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}(t_0) = u_o^{(N-1)}, \quad (1.76)$$

podem ser agrupados em três grandes classes:

- Espectral ou Modal
- Não-Espectral ou Não-Modal
- Numérico

A diferença entre os primeiros dois métodos, refere-se ao uso ou não uso de autovetores (modos).

Na literatura, estas técnicas são desenvolvidas de maneira ampla para os sistemas de primeira ordem. Os sistemas de ordem superior são então transformados em sistemas de primeira ordem através da transformação de Hamilton. Nesta seção são descritas algumas técnicas analíticas gerais para a resolução de maneira direta de sistemas de ordem arbitrária através de métodos espectrais e não espectrais.

1.4.1 Métodos Espectrais

O método espectral para resolução de sistemas descritos pela equação (1.75) se aplica quando o problema associado de autovalor

$$\left(\sum_{j=0}^N A_j \lambda^j \right) v = 0, \quad \text{para } v \neq 0, \quad (1.77)$$

gera a partir de seus Nn autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{Nn})$ e dos autovetores correspondentes $(v_1, v_2, \dots, v_{Nn})$, uma matriz V de ordem Nn , denotada por

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} v_1 & \lambda_2^{N-1} v_2 & \cdots & \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_o \\ V_o D \\ \vdots \\ V_o D^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (1.78)$$

cujas colunas são linearmente independentes. Nessa expressão, D é a *matriz espectral*, uma matriz diagonal de ordem Nn , cujos elementos da diagonal correspondem autovalores do problema e V_o é a matriz cujas colunas são os autovetores associados; isto é,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{Nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V_o = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \end{bmatrix}. \quad (1.79)$$

Em particular, este resultado é satisfeito quando o sistema possui todos os autovalores distintos. A técnica de superposição linear é usualmente utilizada quando tem-se uma entrada simples do tipo exponencial, trigonométrica ou polinomial, entre outras que sejam simples de obter uma solução particular não-homogênea.

1.4.1.1 Caso Homogêneo

Para resolver o problema inicial homogêneo

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) = 0, \quad (1.80)$$

$$u(0) = u_o, \quad \frac{du}{dt}(0) = \dot{u}_o, \quad \dots, \quad \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}(0) = u_o^{(N-1)}, \quad (1.81)$$

escreve-se a solução na forma

$$u(t) = \sum_{j=0}^{Nn} c_j e^{\lambda_j t} v_j, \quad (1.82)$$

onde as constantes c_j são obtidas resolvendo-se o sistema

$$\begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{Nn} v_{Nn} &= u_0 \\ c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_{Nn} \lambda_{Nn} v_{Nn} &= \dot{u}_0 \\ &\vdots \\ c_1 \lambda_1^{N-1} v_1 + c_2 \lambda_2^{N-1} v_2 + \dots + c_{Nn} \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} &= u_0^{N-1} \end{aligned},$$

cujas matrizes dos coeficientes correspondem à matriz V .

EXERCÍCIO

Modificar o processo acima para o caso dos dados iniciais estarem fornecidos em $t = t_0$.

EXERCÍCIO

Seja $h(t) = e^{tA}$ a solução fundamental associada do sistema $\dot{u}(t) = Au(t)$.

a) Verificar as seguintes propriedades

$$1. \quad h(t+s) = h(t)h(s)$$

$$2. \quad h(t)^{-1} = h(-t)$$

$$3. \dot{h}(t) = Ah(t) = h(t)A$$

$$4. \text{ Se } Av = \lambda v, \text{ então } h(t) = e^{t\lambda}v.$$

$$5. \text{ Se } D \text{ é uma matriz diagonal com elementos } d_{ii} = \lambda_i, \text{ então}$$

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (1.83)$$

$$6. \text{ Se } A = PDP^{-1} \text{ onde } D \text{ é diagonal, então } h(t) = Pe^{tD}P^{-1}.$$

$$7. \text{ Se } \Phi(t) \text{ denota uma matriz base de soluções, então } h(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t).$$

1.4.1.2 Caso não-homogêneo

Soluções particulares da equação não-homogênea podem ser obtidas de maneira simples para certos tipos de funções elementares. Por exemplo, para os seguintes tipos de funções

- Linear $f(t) = ct + d$
- Harmônica $f(t) = e^{i\omega t}v$

tem-se as soluções particulares

$$u_p(t) = A_0^{-1} [ct + d - A_1 A_0^{-1} c]. \quad (1.84)$$

e

$$u_p(t) = H(i\omega)e^{i\omega t}w, \quad (1.85)$$

onde

$$H(i\omega) = \left(\sum_{j=0}^N (i\omega)^j A_j \right)^{-1}, \quad (1.86)$$

corresponde a resposta em frequência do sistema.

Para termos não-homogêneos gerais, o método espectral pode ser utilizado com o método de Lagrange da variação de parâmetros. Porém, como este último é bastante geral, ele será incluído como método não-espectral.

EXERCÍCIO

Considere a equação de primeira ordem $\dot{u}(t) = Au(t) + f(t)$ com A de ordem nxn e f(t) continua nx1 e o dado inicial $u(0) = u_o$. Suponha que A não é defeituosa, isto é, possui n autovetores v_1, v_2, \dots, v_n que são linearmente independentes.

a) Seja V a matriz modal e $W=V^{-1}$ sua inversa. Denote-se as linhas de W como sendo w_i^T , $i=1:n$. Escrever f como combinação linear da base formada pelos autovetores e determine os coeficientes f relativos a essa base. Sug: $f=VV^{-1}f$.

b) Para cada parcela $d_j v_j$ da combinação linear de f, obtenha uma solução particular da mesma forma $u_{p,j} = g_j(t)v_j$ com $u_{p,j}(0) = 0$, $j=1:n$.

c) Escreva a solução do problema de valor inicial em termos da base modal e da solução particular obtida em b).

EXERCÍCIO

Considere a equação de primeira ordem descrita no exercício anterior.

a) Mostrar que a mudança de variáveis $y = V^{-1}u$ desacopla a equação, isto é, a transforma num sistema com coeficiente uma matriz diagonal D.

b) Mostrar que

$$u(t) = V e^{Dt} V^{-1} u_0 + V \int_0^t e^{D(t-\tau)} V^{-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.87)$$

1.4.1.3 Métodos Não-Espectrais

Nestes métodos considera-se o método operacional que utiliza a transformada de Laplace, a fórmula obtida para $h(t)$, já introduzidos, e o método de Lagrange da variação de parâmetros. Nesta subseção somente aborda-se este último.

Seja $\{\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_{Nn}\}$ uma base de soluções do sistema homogêneo

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) = 0,$$

A solução para sistemas do tipo (1.75) escreve-se na forma

$$u(t) = c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t) + \cdots + c_{Nn}(t)\phi_{Nn}(t) = \Phi(t)c(t), \quad (1.88)$$

onde $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_{Nn}]$.

Para determinar as funções $c_j(t)$ assume-se as condições de Lagrange

$$\Phi(t)c^{(k)}(t) = 0, \quad \text{para } k = 1 : N - 1. \quad (1.89)$$

Assim, resulta que as k -ésimas derivadas de $u(t)$ são da forma

$$u^{(k)}(t) = \Phi^{(k)}(t)c(t), \quad \text{para } k = 1 : N - 1. \quad (1.90)$$

Substituindo-se a expressão para $u(t)$, dada por (1.88) e para suas derivadas (1.90), na equação (1.75), resulta

$$A_N \Phi^{(N-1)}(t) \dot{c}(t) = f(t). \quad (1.91)$$

Desta forma, as N equações descritas por (1.89) e (1.91) formam o sistema linear

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \phi_j(t) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \dot{\phi}_j(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \phi_j^{(N-2)}(t) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \phi_j^{(N-1)}(t) A_N &= f(t) \end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_{Nn}(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) & \cdots & \dot{\phi}_{Nn}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_1^{(N-1)}(t) & \phi_2^{(N-1)}(t) & \cdots & \phi_{Nn}^{(N-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_{Nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f(t) \end{bmatrix}.$$

ou, de maneira matricial compacta

$$W\dot{c}(t) = \mathcal{F}(t). \quad (1.92)$$

Denotando-se,

$$W(t) = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dot{\Phi}_o \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_o^{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad \dot{c}(t) = \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_{Nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f(t) \end{bmatrix}, \quad (1.93)$$

o sistema pode ser representado na forma compacta

$$W\dot{c}(t) = \mathcal{F}(t). \quad (1.94)$$

Resolvendo-o em termos das componentes do vetor $\dot{c}(t)$, obtém-se

$$\dot{c}(t) = W^{-1}(t)\mathcal{F}(t). \quad (1.95)$$

Integrando, obtém-se um valor de $c(t)$ para a solução não-homogênea. $u(t) = \Phi(t)c(t)$.

Por outro lado, realizando integração definida entre t_o e t , segue

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t W^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau. \quad (1.96)$$

Assim, a solução (1.88) pode ser escrita na forma

$$u(t) = \Phi(t)c(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t)W^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau, \quad (1.97)$$

sendo o vetor inicial $c(t_0)$ obtido a partir das condições iniciais do problema, isto é,

$$c(t_0) = \Phi^{-1}(t_0) \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (1.98)$$

EXERCÍCIO

Mostrar que a matriz W é não-singular.

2 SISTEMAS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

Neste capítulo, realizaremos o estudo de dos sistemas particulares de primeira e de segunda ordem por serem de grande interesse nas aplicações. As técnicas a serem utilizadas podem ser identificadas do ponto de vista espectral ou não espectral, conforme seja necessário ou não o uso dos autovetores dos coeficientes matriciais envolvidos no sistema, respectivamente. Deve ser ressaltado que a formulação permite uma adequada analogia com o caso escalar, com a introdução de funções matriciais e o método espectral.

2.1 Funções Matriciais

Se trata de ampliar o conceito de função escalar para funções matriciais, tal como $\sin(A)$, $\exp(A)$, etc., onde A é uma matriz, mediante o uso de séries matriciais de potências $\sum c_k A^k$. O resultado principal desta seção é o *teorema de redução polinomial* que expressa o valor da série $\sum c_k A^k$ como um polinômio matricial de grau $n - 1$ onde n é a ordem da matriz A , cujos coeficientes são calculados pelo processo de *interpolação de Hermite*. Para efeitos de cálculo numérico podemos simplificar o processo de interpolação mediante os *métodos diretos* (cálculo direto de funções matriciais para certo tipo de matrizes), os *métodos polinomiais* (usando os autovalores da matriz) e os *métodos de decomposição* (usando autovalores e autovetores da matriz).

Para cada matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ consideramos a norma de A como:

$$\|A\| = \max_{j=1:n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

O seguinte critério de convergência será o ponto de partida para a definição de função matricial, como uma extensão de funções definidas analiticamente.

Lema 2.1. *Se a série escalar*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

tem raio de convergência R , então a série matricial

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

converge para qualquer matriz quadrada A que satisfaça $\|A\| < R$.

Prova. Seja $A^k = [a_{ij}^{(k)}]_{n \times n}$ para $k \geq 1$, e $A^0 = I = [\delta_{ij}]_{n \times n} = [a_{ij}^{(0)}]_{n \times n}$. Logo,

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad k \geq 0.$$

Comparando, teremos que:

$$\left| \sum_{k=0}^N c_k a_{ij}^{(k)} \right| \leq \sum_{k=0}^N |c_k| \|A\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \|A\|^k < \infty, \quad \|A\| < R, \quad \forall N \geq 0,$$

pois a convergência da série de potências $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ é absoluta. Logo, a série $\sum c_k a_{ij}^{(k)}$ converge para $\|A\| < R$, para i, j arbitrários, e portanto $\sum c_k A^k$ converge. \square

Definição 2.2. Seja $f(z)$ uma função escalar que admite uma expansão em série de Taylor:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

para $|z| < R$. Definimos a função matricial:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} A^k,$$

para toda matriz quadrada A de ordem $n \times n$ com $\|A\| < R$.

Exemplos:

Como ilustração, teremos as seguintes funções matriciais:

1. $p(A) = \sum_{k=0}^m c_k A^k$, função polinomial.
2. $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, função exponencial.

3. $\text{sen}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$, função seno.
4. $\text{cos}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$, função cosseno.
5. $\text{senh}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$, função seno hiperbólico.
6. $\text{cosh}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!}$, função cosseno hiperbólico.
7. $\ln(I + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} A^k}{k}$, $\|A\| < 1$, função logarítmica.

Observemos que se $f(A)$ está bem definida, então também é o caso para as funções “derivadas” $f^{(j)}(A)$. Assim, por exemplo, teremos que:

$$f'(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} A^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} A^k$$

está bem definida.

Por outro lado, a função $F(t) = f(tz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k t^k$, onde $f(z)$ é inteira ($R = \infty$), pode ser derivada com respeito a t , isto é:

$$\frac{d}{dt} f(tz) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} z^k t^{k-1} = z f'(tz).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} f(tA) = A f'(tA).$$

As funções matriciais possuem várias propriedades, que permitem seu emprego nas mais variadas situações.

Propriedades: Sejam $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ funções escalares definidas para $|z| < R$ e seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que $\|A\| < R$. Se cumprem:

1. Se $h(z) = f(z) + g(z)$, então $h(A) = f(A) + g(A)$.
2. Se $q(z) = f(z)g(z)$, então $q(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

3. Se P é uma matriz não-singular de ordem $n \times n$, então :

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P. \quad (2.1)$$

4. Se λ é um autovalor de A e \mathbf{v} é um autovetor associado a λ , então $f(\lambda)$ é autovalor de $f(A)$ e \mathbf{v} um autovetor associado a $f(\lambda)$, quer dizer:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \implies f(A)\mathbf{v} = f(\lambda)\mathbf{v}.$$

5. Se \mathbf{w} é um autovetor generalizado de A correspondente ao autovalor λ , então :

$$f(A)\mathbf{w} = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!} (A - \lambda I)^j \mathbf{w}, \quad (2.2)$$

onde $(A - \lambda I)^k \mathbf{w} = 0$ para $k \geq s$.

6. Sejam $f_1(z) = \sum c_k, \dots, f_m = \sum d_k z^k$, m funções escalares que convergem para $|z| < R$, e seja $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ um polinômio em m variáveis tal que:

$$\Phi(f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)) = 0.$$

Então :

$$\Phi(f_1(A), f_2(A), \dots, f_m(A)) = 0,$$

para qualquer matriz A de ordem $n \times n$ tal que $\|A\| < R$.

Prova. 1., 2., e 3. são propriedades óbvias. Por outro lado, 4. é um caso particular de 5. Provemos 5. Temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
 f(A)\mathbf{w} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \mathbf{w} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k [(A - \lambda I) + \lambda I]^k \mathbf{w} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} (A - \lambda I)^j \mathbf{w} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} c_k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} (A - \lambda I)^j \mathbf{w} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=j}^{\infty} c_k j! \binom{k}{j} \lambda^{k-j}}{j!} (A - \lambda I)^j \mathbf{w} = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!} (A - \lambda I)^j \mathbf{w}
 \end{aligned}$$

pois $(A - \lambda I)^j \mathbf{w} = 0$, para $j \geq s$, e $f^{(j)}(\lambda) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k j! \binom{k}{j} \lambda^{k-j}$.

Agora provemos 6. Seja $\Gamma(z) = \Phi(f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z))$. Como Φ é um polinômio, a função $\Gamma(z)$ é uma combinação de somas e produtos de séries de potências, e é, portanto, uma série de potências. Logo, podemos escrever $\Gamma(z)$ na forma:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k,$$

para certas constantes α_k , $k \geq 0$. Como $\Gamma(z) = 0$ para $|z| < R$, então $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = 0$ para $|z| < R$. Disto concluímos que $\alpha_k = 0$, $\forall k \geq 0$. Logo: $\Gamma(A) = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot A^k = 0$ e portanto $\Phi(f_1(A), f_2(A), \dots, f_m(A)) = 0$. \square

2.2 Definição Equivalente de Funções Matriciais

A seguir, será dada uma definição equivalente de função matricial utilizando integrais de contorno complexas. Precisamos dos seguintes resultados prévios:

Lema 2.3. *Seja A uma matriz de ordem $n \times n$ com autovalores contidos em uma curva Γ fechada e suave. Logo, se*

$$p(z) = \sum_{k=0}^m c_k z^k$$

é um polinômio qualquer, se cumpre que:

$$\sum_{k=0}^m c_k A^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} p(z) dz.$$

Prova. Seja $J = \text{diag}[z_1, \dots, z_n]$ a forma normal de Jordan de A , quer dizer, $A = P^{-1}JP$ para alguma matriz P não-singular. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} p(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left[(zI - P^{-1}JP)^{-1} \sum_{k=0}^m c_k z^k \right] dz \\ &= \sum_{k=0}^m c_k \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} P^{-1} (zI - J)^{-1} P z^k dz \right] \\ &= \sum_{k=0}^m c_k P^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - J)^{-1} z^k dz \right] P. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Suponha-se que A é diagonalizável. Então, J é uma matriz diagonal e segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - J)^{-1} z^k dz &= \text{diag} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z^k}{z - z_1} dz, \dots, \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z^k}{z - z_n} dz \right] \\ &= \text{diag} [z_1^k, \dots, z_n^k] \\ &= J^k. \end{aligned}$$

Logo, por (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} p(z) dz &= \sum_{k=0}^m c_k P^{-1} J^k P \\ &= \sum_{k=0}^m c_k A^k = p(A). \end{aligned}$$

□

Se A não é diagonalizável, então, existe uma seqüência de matrizes A_k que são simples (diagonalizáveis com autovalores não repetidos) que converge para A . [JOHN, Lemma pp.104) Assim,

$$p(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} p(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A_k)^{-1} p(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} p(z) dz$$

pois,

$$R_k = (zI - A_k)^{-1} \rightarrow R = (zI - A)^{-1}.$$

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que R_k converge para R para z suficientemente grande.
2. Escrever $(zI - J)^{-1}$ como série geométrica para z suficientemente grande.
3. Utilizar o exercício anterior e simplifique a prova do lema.

Dada uma matriz A e uma função complexa $f : D \rightarrow C$ analítica de valor singular com domínio $D \subseteq \mathbb{C}$ simplesmente conexo, definimos:

$$\tilde{f}(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} f(z) dz,$$

onde Γ é uma curva fechada e suave contida em D e que contém no seu interior todos os autovalores de A .

Lema 2.4. Se $\{g_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ é uma seqüência de funções analíticas sobre D tal que:

$$g_m(z) \rightarrow g(z) \text{ uniformemente sobre } D,$$

então

$$\tilde{g}_m(A) \rightarrow \tilde{g}(A).$$

Prova. Para todas as funções $g_m(z)$, podemos considerar uma só curva $\Gamma \subset D$ e observamos que cada termo da matriz:

$$\tilde{g}_m(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} g_m(z) dz$$

converge uniformemente ao termo respectivo da matriz:

$$\tilde{g}(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} g(z) dz.$$

□

Agora, enunciamos a definição equivalente:

Teorema 2.5. *Se $f(z)$ está definida por $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ para $|z| < R$, então para qualquer matriz A de ordem $n \times n$ com $\|A\| < R$ se cumpre que:*

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} f(z) dz = \tilde{f}(A)$$

onde Γ é uma curva fechada e simples que contém os autovalores de A .

Prova. A seqüência

$$\left\{ f_m(z) = \sum_{k=0}^m c_k z^k \right\}_{m=0}^{\infty}$$

converge uniformemente a $f(z)$ para $|z| < R'$, $R' < R$. Se todos os autovalores de A estão contidos em $|z| < R'$, então pelo lema 2.3

$$\tilde{f}_m(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} f_m(z) dz = \sum_{k=0}^m c_k A^k = f_m(A),$$

onde $\Gamma : |z| < R''$, $R' < R'' < R$, e aplicando o lema 2.4 obteremos que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k.$$

□

2.3 Teorema de Redução Polinomial

Lema 2.6. *Seja $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $|z| < R$ e A uma matriz com autovalores λ_i de multiplicidade m_i , $i = 1 : s$, respectivamente, contidos em $|z| < R$. Então :*

$$f(z) = q(z)p(z) + r(z),$$

onde $p(z) = \det(zI - A)$, $r(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$ é um polinômio de grau $n - 1$ e $q(z)$, certa função de z .

Prova. A função $\frac{1}{p(z)}$ tem uma expansão em frações parciais, digamos:

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z - \lambda_i)^j};$$

logo, considerando a aproximação de $f(z)$ mediante sua soma de Taylor para cada um dos autovalores diferentes e correspondente multiplicidade,

$$f(z) = f(\lambda_i) + (z - \lambda_i)f'(\lambda_i) + \dots + \frac{(z - \lambda_i)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j-1)}(\lambda_i) + R_{ji}(z - \lambda_i)$$

onde R_{ji} é de ordem $(z - \lambda_i)^j$, podemos escrever

$$\frac{f(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{ij} \left[f(\lambda_i) + (z - \lambda_i)f'(\lambda_i) + \dots + \frac{(z - \lambda_i)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j-1)}(\lambda_i) \right]}{(z - \lambda_i)^j} + q(z).$$

com $q(z)$ analítica onde $f(z)$ é analítica.

Considerando que

$$p(z) = \prod_{k=1}^s (z - \lambda_k)^{m_k},$$

segue que

$$r(z) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} \left[f(\lambda_i) + (z - \lambda_i) f'(\lambda_i) + \dots + \frac{(z - \lambda_i)^{j-1}}{(j-1)!} f^{(j-1)}(\lambda_i) \right] \frac{p(z)}{(z - \lambda_i)^j},$$

é um polinômio de grau $n - 1$, e decorre a igualdade desejada. \square

A existência de divisores de zero na álgebra de matrizes, da qual o teorema de Cayley-Hamilton é possível, permite obter o seguinte resultado central:

Teorema 2.7 (Redução Polinomial). *Seja $f(z)$ a função escalar definida pela série convergente $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ para $|z| < R$. Então para qualquer matriz A quadrada de ordem $n \times n$, com $\|A\| < R$, existem constantes b_k , $k = 0 : n - 1$, tais que:*

$$f(A) = r(A) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k A^k, \quad (2.4)$$

onde $r(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$. Além disso, os coeficientes b_k , $k = 0 : n - 1$, são obtidos do seguinte sistema de equações :

$$r^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0 : m_i - 1, \quad i = 1 : s, \quad (2.5)$$

onde λ_i , $i = 1 : s$, são os autovalores de A com multiplicidade m_i , respectivamente.

Prova. Tem-se que

$$(zI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(zI - A)}{\det(zI - A)} = \frac{Q(z)}{p(z)}$$

onde $Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} Q_k z^k$ vem a ser um polinômio matricial em z de grau $n-1$ e $p(z)$ é o polinômio característico da matriz A . Então,

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} Q_k \oint_{\Gamma} z^k \left(q(z) + \frac{r(z)}{p(z)} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} Q_k \oint_{\Gamma} z^k \frac{r(z)}{p(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n-1} Q_k z^k \frac{r(z)}{p(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} r(z) dz = r(A) \end{aligned}$$

Para obter os coeficientes do polinômio $r(z)$, observe-se que

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{m_i}.$$

implica que para cada $i = 1 : s$ se cumpre:

$$p^{(j)}(\lambda_i) = \left. \frac{d^j p(z)}{dz^j} \right|_{z=\lambda_i} = 0, \quad j = 0 : m_i - 1.$$

Além disso, pelo Lema 2.6,

$$f(z) = q(z)p(z) + r(z) \tag{2.6}$$

onde $r(z)$ é um polinômio de grau $n - 1$:

$$r(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k.$$

Usando a regra de Leibniz para derivar (2.6) j vezes, obtém-se:

$$f^{(j)}(z) = \sum_{k=0}^j \binom{k}{j} q^{(j-k)}(z) p^{(k)}(z) + r^{(j)}(z),$$

e por (2.3) obteremos que:

$$r^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0 : m_i - 1, \quad i = 1 : s.$$

□

OBSERVAÇÃO

Uma prova *heurística* (plausível, formal, não-rigorosa) segue do Lema anterior com o uso do teorema de Cayley-Hamilton. Substituindo z por A em $f(z)=q(z)p(z)+r(z)$, vem $f(A)=q(A)p(A)+r(A)=r(A)$ uma vez que $p(A)=0$.

2.4 Extensão da Definição de Funções Matriciais

Podemos observar que nas fórmulas estabelecidas para calcular $f(A)$, assim como no teorema de redução polinomial somente se precisa conhecer os valores de $f(z)$ para $z = \lambda_i$, $i = 1 : s$ onde λ_i é um autovalor de A . Levando em conta esta idéia, vamos ampliar a definição de uma função matricial da seguinte forma:

Definição 2.8. *Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz com valores próprios λ_k , $k = 1 : s$ de multiplicidade m_k , respectivamente.*

1. *Uma função escalar $f(z)$ é dita definida no espectro de A se existem os valores $f^{(j)}(\lambda_k)$, $j = 0 : m_k - 1$, para cada autovalor λ_k , $k = 1 : s$.*

2. *Se $f(z)$ é uma função escalar definida no espectro de A , se dirá que o polinômio $r(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$ é um polinômio de interpolação para $f(z)$ se:*

$$r^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k), \quad j = 0 : m_k - 1, \quad k = 1 : s.$$

3. *Se $f(z)$ é uma função escalar definida no espectro de A e $r(z)$ é um polinômio de interpolação para $f(z)$, definimos:*

$$f(A) = r(A).$$

O valor $r(A)$ pode ser calculado usando (2.4) ou qualquer dos métodos referidos na seção 2.1.

Observação : As funções $z^{m/n}$ e $\ln(z)$, m, n inteiros, são funções escalares definidas em espectros de matrizes não -singulares; sem embargo, são funções de valores múltiplos, pois se $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, então para $k = 0 : n - 1$:

$$z^{m/n} = r^{m/n} \left[\cos \frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i \sin \frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) \right], \quad (2.7)$$

$$\ln(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi). \quad (2.8)$$

Se A é uma matriz não singular, $A^{m/n}$ ou $\ln(A)$ é a matriz resultante de considerar $k = 0$ em (2.7) ou (2.8), respectivamente, e se chamará *valor principal*.

Para a composição de funções matriciais, veja-se o teorema em [JOHN, pp113].

2.5 Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem

A função exponencial matricial aparece de forma extensiva na resolução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} B\dot{u} + Cu(t) &= F(t) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

onde $B = [b_{ij}]_{n \times n}$, $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ são matrizes constantes, B não-singular, $F(t) = [f_i(t)]_{n \times 1}$ é um vetor de funções contínuas que dependem de t , $u = [u_i(t)]_{n \times 1}$, é um vetor de incógnitas, $\dot{u} = [\dot{u}_i(t)]_{n \times 1}$, e t_0 , u_0 são dados.

Na forma normal, tem-se a equação

$$\dot{u} = Au(t) + f(t), \quad (2.9)$$

onde $A = -B^{-1}C$, $f(t) = B^{-1}F(t)$.

Em analogia ao caso escalar ($\dot{u} = au$), consideremos $h(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$.

Derivando j vezes:

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{dt^j} h(t) &= \frac{d^j}{dt^j} e^{At} = \sum_{k=j}^{\infty} j! \binom{k}{j} c_k A^k t^{k-j} \\ &= A^j \sum_{k=j}^{\infty} j! \binom{k}{j} c_k (At)^{k-j} = A^j \left. \frac{d^j}{dz^j} e^z \right|_{z=At} = A^j e^{At}, \quad j \geq 1 \end{aligned}$$

resulta, em particular:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A. \quad (2.10)$$

Logo,

$$u(t) = e^{A(t-t_0)} u_0 \quad (2.11)$$

vem a ser a solução do problema de Cauchy homogêneo:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= Au, \\ u(t_0) &= u_0.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Considerando (2.9) e usando (2.10) teremos:

$$\begin{aligned}\dot{u} - Au &= f(t) \implies e^{At}\dot{u} - Ae^{At}u = e^{-At}f(t) \\ \implies \frac{d}{dt}(e^{-At}u) &= e^{-At}f(t);\end{aligned}$$

integrando entre t_0 e t , e considerando a condição inicial de (2.9):

$$e^{-At}u(t) - e^{-At_0}u(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-As}f(s)ds;$$

e por último obteremos:

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds.$$

Resumindo, teremos o seguinte resultado:

Teorema 2.9. *O problema de Cauchy*

$$\begin{aligned}B\dot{u} + Cu &= F(t) \\ u(t_0) &= u_0\end{aligned}$$

tem como solução

$$u(t) = h(t - t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^t h(t - \tau)f(\tau)d\tau.\tag{2.13}$$

onde $f(t) = B^{-1}F(t)$ e $h(t)$ é a matriz fundamental $n \times n$

$$\begin{aligned}h(t) &= e^{tA}B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} B^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (zI - A)^{-1} e^{tz} dz B^{-1}, \\ A &= -B^{-1}C\end{aligned}$$

que satisfaz o problema de valor inicial

$$B\dot{h} + Ch = 0$$

$$Bu(0) = I$$

A matriz de transferência é dada por

$$H(s) = (sI + B^{-1}C)^{-1}B^{-1}$$

e definida para qualquer escalar s que não seja autovalor de $-B^{-1}C$.

2.5.0.4 Cálculo de e^{tA}

Existem muitos métodos para o cálculo da exponencial de uma matriz. O trabalho de Moler e Van Loan (*Nineteen ways of computing the exponential of a matrix*, SIAM Rev, December 1978), faz uma descrição sobre eles. Recentemente, Moler (SIAM Rev. 2003, acrescenta o mais um método. Aqui somente será apresentado o método espectral e a fórmula não-espectral.

Considere-se que A é uma matriz de ordem $n \times n$, cujos autovalores são denotados por $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ e os autovetores correspondentes dados por (v_1, v_2, \dots, v_n) . Assuma-se que os n autovetores são linearmente independentes.

Seja $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ a matriz modal e $D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ a matriz diagonal autovalores ou matriz espectral. Então, para $A = VDV^{-1}$ tem-se

$$e^{tA} = e^{tVDV^{-1}} = Ve^{tD}V^{-1}.$$

Na prática, o cálculo da inversa da matriz modal pode ser dispendioso. Porém, se A é uma matriz simétrica este cálculo é simples uma vez que $V^{-1} = V^T$, isto é, a base de autovetores é ortonormal. Assim

$$e^{tA} = e^{tVDV^T} = Ve^{tD}V^T, \quad A = A^T. \quad (2.14)$$

Em forma expandida, tem-se

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} v_k v_k^T, \quad A = A^T. \quad (2.15)$$

A função matricial e^{tA} pode ser obtida como caso particular da fórmula apresentada no primeiro capítulo para equações de ordem arbitrária. Ela é definida para qualquer matriz quadrada A pela expressão

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{j-1} b_{n-k} d^{j-1-k}(t) h_{n-j} \right). \quad (2.16)$$

A relação (2.16) envolve três equações características dos tipos algébrica, diferencial e em diferenças. A equação algébrica corresponde ao polinômio característico

$$P(s) = \det(Is - A) = \sum_{k=0}^n b_k s^k, \quad (2.17)$$

associado ao sistema $\dot{u}(t) = Au(t)$ o qual fornece os valores dos coeficientes b_k . A função temporal $d(t)$ cujas derivadas aparecem na equação (2.16) satisfaz o problema de valor inicial dado por

$$b_n d^n(t) + b_{n-1} d^{n-1}(t) + \cdots + b_1 \dot{d}(t) + b_0 d(t) = 0, \quad (2.18)$$

com condições iniciais

$$d(0) = 0, \quad \dot{d}(0) = 0, \dots, d^{n-2}(0) = 0, \quad b_n d^{n-1}(0) = 1. \quad (2.19)$$

E por último, a função discreta h_k satisfaz a equação matricial em diferenças

$$h_{k+1} = Ah_k, \quad h_k = h^k(0), \quad (2.20)$$

sendo o valor inicial $h_0 = I$. A solução $h_k = A^k$ é dada pelas potências da matriz A . Isto pode ser dispendioso se A é uma matriz de grande porte.

2.6 Sistemas de Equações Diferenciais de Segunda Ordem: Caso Conservativo

Vamos resolver o sistema de segunda ordem sem atrito (*conservativo*)

$$M\ddot{u} + Ku = F(t) \quad (2.21)$$

mediante o uso de funções matriciais. Suporemos que M é não-singular.

2.6.1 Caso Homogêneo

Consideremos a equação (2.21) com $f(t) = 0$:

$$M\ddot{u} + Ku = 0. \quad (2.22)$$

Pelo método de Cauchy, supõe-se uma solução da forma

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k / k!.$$

Substituindo na equação, decorre

$$Mu_{k+2} + Ku_k = 0$$

ou, simplesmente

$$u_{k+2} + Au_k = 0,$$

onde $A = M^{-1}K$. Iterando, vem

$$\begin{aligned} u_2 &= -Au_o \\ u_3 &= -Au_1 \\ u_4 &= -Au_2 = A^2u_o \\ u_5 &= -Au_3 = A^2u_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por indução,

$$u_{2k} = (-1)^k A^k u_o \quad u_{2k+1} = (-1)^k A^k u_1.$$

Assim,

$$u(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^k t^{2k}}{2k!} \right) u_o + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) u_1$$

Observa-se que a primeira série de potências corresponde, de maneira simbólica, com a expansão de $\cos(\sqrt{A}t)$ e a segunda com a de $\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}$.

Teorema 2.10. *O problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} M\ddot{u} + Ku &= 0, \\ u(0) &= u_o, \quad \dot{u}(0) = u_1, \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante não-singular, $K = [k_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz quadrada constante, $u = [u_i]_{n \times 1}$ é um vetor de incógnitas que dependem de t e $\ddot{u} = [\ddot{u}_i(t)]_{n \times 1}$, tem como única solução

$$u(t) = h_o(t)u_o + h_1(t)u_1,$$

onde $h(t)$ e $\dot{h}(t)$ estão definidas como sendo

$$h_o(t) = \cos(\sqrt{M^{-1}K}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (M^{-1}K)^k t^{2k}}{2k!}, \quad (2.24)$$

$$h_1(t) = \frac{\sin(\sqrt{M^{-1}K}t)}{\sqrt{M^{-1}K}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (M^{-1}K)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (2.25)$$

2.6.2 Caso Não-Homogêneo

Consideramos a equação (2.21) com $f(t)$ contínua. A matriz fundamental $h(t)$ pode ser utilizada como fator integrante. Multiplicando por $h(t-\tau)$ e integrando por partes duas vezes o termo da segunda derivada em $u(\tau)$, vem

$$h(t-\tau)M\ddot{u}(\tau) + h(t-\tau)Ku(\tau) = h(t-\tau)F(\tau)$$

$$h(t-\tau)M\dot{u}|_{t_o}^t + \int_{t_o}^t \dot{h}(t-\tau)M\dot{u}d\tau + \int_{t_o}^t h(t-\tau)Ku d\tau = \int_{t_o}^t h(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

$$-h(t-t_o)M\dot{u}(t_o) + \dot{h}(t-t_o)Mu|_{t_o}^t - \int_{t_o}^t (\dot{h}(t-\tau)M + h(t-\tau)K)ud\tau = \int_{t_o}^t h(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

Como $h(t)$ é solução pela esquerda e direita, decorre que

$$u(t) = \dot{h}(t-t_o)u(t_o) + h(t-t_o)M\dot{u}(t_o) + \int_{t_o}^t h(t-\tau)F(\tau)d\tau.$$

Resumindo, obteremos o seguinte:

Teorema 2.11. *O problema de valor inicial:*

$$\begin{aligned} M\ddot{u} + Ku &= F(t), \\ \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \mathbf{u}_1, \end{aligned}$$

onde $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz constante não-singular, $K = [k_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz constante, $F(t) = [F_i(t)]_{n \times 1}$ é um vetor de funções contínuas, $u = [u_i(t)]_{n \times 1}$ é um vetor

de incógnitas que dependem de t , $\ddot{\mathbf{u}} = [\ddot{u}_i(t)]_{n \times 1}$, e t_0 , \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 são dados, tem como solução

$$u(t) = h_o(t - t_o)u_{t_o} + h_1(t - t_o)\dot{u}(t_o) + \int_{t_o}^t h_1(t - s)M^{-1}F(s)ds,$$

onde $h_o(t) = \dot{h}(t)M$, $h_1(t) = h(t)M$ são as séries definidas em (2.24) e (2.25), respectivamente, e

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (M^{-1}K)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} M^{-1} = \frac{\text{sen}(\sqrt{M^{-1}K}t)}{\sqrt{M^{-1}K}} M^{-1} \quad (2.26)$$

é a solução do problema inicial

$$\begin{aligned} M\ddot{h} + Kh &= 0, \\ \mathbf{h}(0) &= 0, \quad M\dot{h}(0) = I. \end{aligned}$$

Simbolicamente, tem-se

$$u(t) = \cos(\sqrt{A}(t - t_0)) u_0 + \frac{\text{sen}(\sqrt{A}(t - t_0))}{\sqrt{A}} \mathbf{u}_1 + \int_{t_0}^t \frac{\text{sen}(\sqrt{A}(t - s))}{\sqrt{A}} \mathbf{f}(s) ds.$$

2.6.3 Freqüências naturais e modos de vibração

Se uma das matrizes M ou K for não-diagonal na equação

$$M\ddot{x} + Kx = 0. \quad (2.27)$$

então haverá *acoplamento* das coordenadas. O método espectral (*análise modal*) permite introduzir uma mudança de coordenadas que des-acopla as equações, isto é, permite transformar as matrizes M , K em matrizes diagonais de maneira simultânea.

O primeiro passo, no método espectral, consiste em procurar soluções exponenciais no tempo, isto é, do tipo $x(t) = e^{\lambda t}v$ onde v é um vetor não-nulo. Substituindo a suposta solução, na equação diferencial anterior, decorre o problema de autovalor gene-

ralizado

$$(\lambda^2 M + K)v = 0 \quad (2.28)$$

O sistema anterior possuirá soluções não-nulas somente se o seu determinante for nulo.

Assim, λ deverá ser raiz da equação característica

$$\det(\lambda^2 M + K) = 0$$

Em particular, para obter *soluções harmônicas* $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ considera-se que $\lambda = i\omega$ com ω real. Neste caso,

$$(K - \omega^2 M)v = 0 \quad (2.29)$$

$$\det(K - \omega^2 M) = 0. \quad (2.30)$$

Os valores $\lambda = i\omega$ são chamados de *autovalores* do sistema e, os vetores v , de *autovetores* ou *modos*. Quando ω tem um valor real, é referido como *freqüência* do sistema e o correspondente autovetor v , como modo associado à freqüência ω .

Em geral, as raízes ω^2 de (2.30) podem ser reais ou complexas conjugadas. Entretanto, condições não muito restritivas sobre as matrizes M e K garantem que as raízes ω^2 são não-negativas.

Teorema 2.12. MODOS NORMAIS

Suponha-se que as matrizes M , K são simétricas de ordem $n \times n$ com M positiva definida. Então, (2.30) possui n raízes reais $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ e os correspondentes autovetores v_1, v_2, \dots, v_n obtidos de (2.29) podem ser escolhidos de maneira ortonormal com respeito da matriz M , isto é

$$v_k^T M v_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1 : n \quad (2.31)$$

Se K é não-negativa definida, isto é, $v^T K v \geq 0$ para qualquer vetor v $n \times 1$, então as n raízes são não-negativas.

PROVA

O problema generalizado de autovalor (2.29) pode ser escrito $Sv = \omega^2 v$ com $S = M^{-1}K$.

A matriz S é simétrica com relação ao produto interno $\langle v, w \rangle_M = v^T M w$, pois

$$\langle v, Sw \rangle = v^T M S w = (v^T M S w)^T = w^T S^T M v = (S w)^T M v = \langle S w, v \rangle$$

Portanto, a matriz S possui n autovalores reais e um conjunto ortonormal de n autovetores

$$\begin{aligned} S v_k &= \omega_k^2 v_k, \quad k = 1 : n \\ \langle v_k, v_j \rangle_M &= v_k^T M v_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1 : n \end{aligned}$$

Decorre que os ω_k^2 são reais e os autovetores correspondentes são ortonormais com respeito do produto interno $\langle v, w \rangle = v^T M w$. A última afirmação decorre do fato que de (2.29) segue-se $\omega^2 = \frac{v^T K v}{v^T M v} \geq 0$.

COROLÁRIO

Sejam

$$V = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n], \quad (2.32)$$

a *matriz modal* cujas colunas são os autovetores, e

$$\Omega^2 = \text{diag}[\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \cdots \ \omega_n^2]. \quad (2.33)$$

a *matriz espectral* cujos elementos na diagonal são os quadrados das frequências. Então,

$$V^T M V = I, \quad V^T K V = \Omega^2, \quad (2.34)$$

Portanto, as matrizes M e K podem ser *simultaneamente diagonalizadas* por uma mesma matriz modal V .

Resumindo, para obter a solução do sistema homogêneo $M\ddot{x} + Kx = 0$, que satisfaz as condições iniciais $x(0) = x_o$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_o$, considera-se a solução geral obtida do

princípio da superposição linear com as soluções do tipo exponencial, isto é,

$$u(t) = \sum_{k=1}^n [c_{-k} e^{-i\omega_k t} + c_k e^{i\omega_k t}] v_k, \quad (2.35)$$

uma vez que v_k é o mesmo autovetor para os autovalores $-i\omega_k, i\omega_k$.

Na determinação das constantes c_k , utilizam-se os valores iniciais $u_o = u(0)$, $u'(0) = u'_o$ da solução e a propriedade de ortogonalidade dos modos.

EXEMPLO

Considere-se um sistema torsional com três discos que possuem momento de inércia de massa $I_1 = 2 \times 10^3 kg.m^2$, $I_2 = 3 \times 10^3 kg.m^2$ e $I_3 = 4 \times 10^3 kg.m^2$. Os coeficientes de rigidez dos eixos conectando esses discos são $k_1 = 12 \times 10^5 N.m$, $k_2 = 24 \times 10^5 N.m$ e $k_3 = 36 \times 10^5 N.m$.

1. Obter a matriz modal e a matriz espectral do sistema.
2. Determinar a solução homogênea ou *resposta livre* como resultado das condições iniciais

$$\theta(0) = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,05 \\ 0,01 \end{bmatrix}, \quad \dot{\theta}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

As equações do movimento são

$$M\ddot{\theta} + K\theta = 0,$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} = 2 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} kg.m^2,$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = 12 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} N.m,$$

$$\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T.$$

Aqui $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ são as oscilações torsionais dos discos.

A procura de soluções oscilatórias $u = \text{sen}(\omega t + \phi)v$ do sistema, conduz ao problema de autovalor $(-\omega^2 M + K)v = 0$. Substituindo valores e simplificando, decorre o sistema

$$\left(-\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \right) v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \frac{\omega^2}{6 \times 10^2}$$

$$\text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 - \beta & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1,5\beta & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Este sistema possui solução v não-nula para um certo valor de β somente se o determinante do sistema anula-se. Assim, decorre a equação característica

$$\beta^3 - 5,5\beta^2 + 7,5\beta - 2 = 0,$$

a qual possui as raízes

$$\beta_1 = 0.3516, \quad \beta_2 = 1.606, \quad \beta_3 = 3.542.$$

Como $\omega^2 = 600\beta$, as frequências naturais associadas com as raízes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ são dadas, respectivamente, por

$$\omega_1 = 14.52 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 31.05 \text{ rad/s}, \quad \omega_3 = 46.1 \text{ rad/s}.$$

Os modos são obtidos resolvendo-se (2.36) por eliminação para cada valor da raiz β_k , $k = 1 : 3$. Escolhem-se os autovetores

$$v_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,649 \\ 0,302 \end{bmatrix}, \quad v_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,607 \\ 0,679 \end{bmatrix}, \quad v_3^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -2,54 \\ 2,438 \end{bmatrix}.$$

Para obter a relação $V^T M V = I$, os vetores acima são normalizados

$$v_k = v_k^* / \sqrt{(v_k^*)^T M v_k^*}, \quad k = 1 : 3.$$

Assim,

$$V = \begin{bmatrix} .017 & .014 & .0048 \\ .011 & -.0085 & -.012 \\ .0051 & -.0095 & .012 \end{bmatrix}$$

é a matriz modal e

$$\Omega = \begin{bmatrix} 14,52 & 0 & 0 \\ 0 & 31,05 & 0 \\ 0 & 0 & 46,1 \end{bmatrix}$$

é a matriz espectral do sistema de discos dado.

A forma dos modos é como segue. Consiste em desenhar um autovetor v como função de variável discreta, isto é, unir os pontos $(1, v_1), (2, v_2), \dots, (n, v_n)$ onde v_k é a k -ésima componente do vetor v .

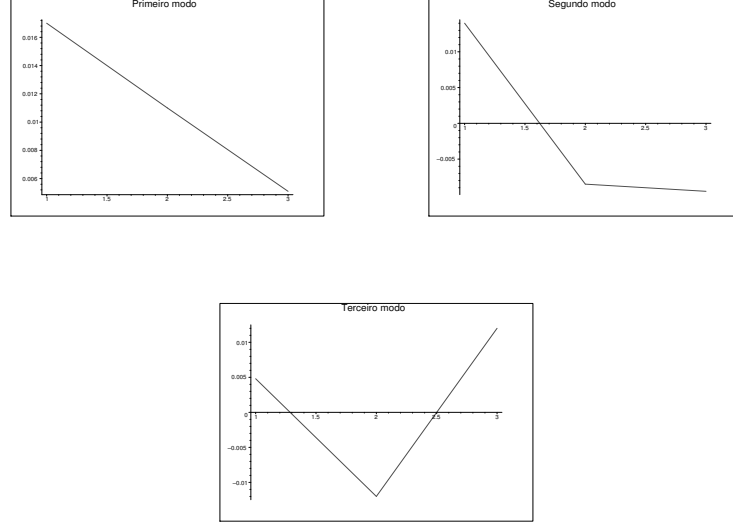


Figura 2.1: Modos do sistema de discos

A resposta livre é dada por (2.35) com $n = 3$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= c_1 e^{i\omega_1 t} v_1 + c_2 e^{i\omega_2 t} v_2 + c_3 e^{i\omega_3 t} v_3 \\ &+ c_{-1} e^{-i\omega_1 t} v_1 + c_{-2} e^{-i\omega_2 t} v_2 + c_{-3} e^{-i\omega_3 t} v_3. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \sum_{k=1}^3 (c_{-k} + c_k) v_k, \\ \theta'(0) &= \sum_{k=1}^3 i\omega_k (c_k - c_{-k}) v_k. \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de modos normais com o primeiro modo, isto é, $v_1^T M v_1 = 1$, $v_1^T M v_2 = 0$, $v_1^T M v_3 = 0$, resulta

$$c_1 + c_{-1} = v_1^T M \theta(0) = 5.254,$$

$$c_1 - c_{-1} = \frac{v_1^T M \dot{\theta}(0)}{i\omega_1} = -85.61i$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.254 \\ -85.61i \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema 2x2, vem

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5.254 \\ -85.61i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.627 - 42.81i \\ 2.627 + 42.81i \end{bmatrix}.$$

Similarmente, para os modos v_2 e v_3 obtém-se

$$\begin{bmatrix} c_2 \\ c_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.36 \\ 27.78i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18 + 13.89i \\ -0.18 - 13.89i \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} c_3 \\ c_{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.1 \\ -11.19i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 + 5.595i \\ 0.55 - 5.595i \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 0.0893\cos(14.52t) + 1.46\sin(14.52t) - 0.00504\cos(31.05 * t) \\ -0.389\sin(31.05t) + 0.00528\cos(46.1t) + 0.0538\sin(46.1t) \\ 0.0578\cos(14.52t) + 0.942\sin(14.52t) + 0.00306\cos(31.05t) + 0.236\sin(31.05t) \\ -0.0132\cos(46.1t) - 0.134\sin(46.1t) \\ 0.0268\cos(14.52t) + 0.437\sin(14.52t) + 0.00342\cos(31.05t) + 0.264\sin(31.05t) \\ +0.0132\cos(46.1t) + 0.134\sin(46.1t) \end{bmatrix}$$

Os gráficos das componentes da resposta livre são dados a seguir.

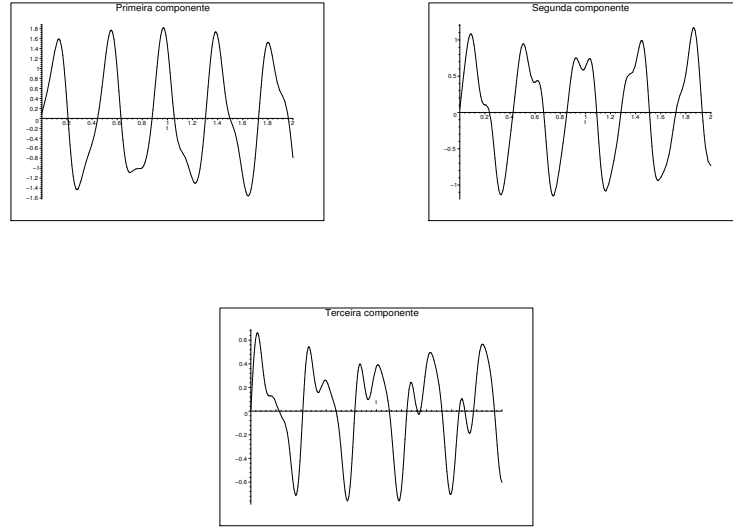


Figura 2.2: Componentes da resposta livre

2.6.4 Expansão em modos normais na resposta-impulso

Se as condições dos modos normais forem satisfeitas por M e K , ou seja,

$$V^T M V = I, \quad V^T K V = \Omega^2,$$

decorre desta primeira relação e, após, multiplicando por K , que

$$M^{-1} = V V^T, \quad M^{-1} K = V V^T K.$$

Então,

$$h(t) = \frac{\sin \sqrt{M^{-1} K} t}{\sqrt{M^{-1} K}} M^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (M^{-1} K)^k M^{-1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Tem-se que

$$(M^{-1} K)^k M^{-1} = (V V^T K)^k V V^T.$$

Com o uso da segunda relação dos modos normais, obtém-se

$$(VV^TK)^k = V\Omega^{2k-2}V^TK.$$

Assim

$$(VV^TK)^kVV^T = V\Omega^{2k-2}V^TKVV^T = V\Omega^{2k}V^T.$$

Portanto,

$$h(t) = \frac{\text{sen}\sqrt{M^{-1}K}t}{\sqrt{M^{-1}K}}M^{-1} = V\frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega}V^T, \quad KV = MV\Omega^2$$

ou, expandida em modos,

$$h(t) = V\frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega}V^T = \sum_{k=0}^n \frac{\text{sen}(\omega_k t)}{\omega_k} u_k u_k^T \quad (2.37)$$

Para a resposta forçada

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

tem-se, na forma modal,

$$x(t) = \int_0^t V^T \frac{\text{sen}\Omega(t-\tau)}{\Omega} V f(\tau) d\tau \quad (2.38)$$

ou

$$x(t) = V^T \begin{bmatrix} \int_0^t \frac{\text{sen}\omega_1(t-\tau)}{\omega_1} f_1(\tau) d\tau \\ \int_0^t \frac{\text{sen}\omega_2(t-\tau)}{\omega_2} f_2(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t \frac{\text{sen}\omega_n(t-\tau)}{\omega_n} f_n(\tau) d\tau \end{bmatrix},$$

onde $f_k(t)$ é a k-ésima componente do vetor $V^T f(t)$.

2.6.5 Expansão em modos normais na matriz de transferência

A matriz de transferência do sistema não-amortecido

$$M\ddot{x} + Kx = f(t)$$

é dada por

$$H(s) = [s^2M + K]^{-1}.$$

Se as relações de modos normais forem satisfeitas pelas matrizes M e K , isto é,

$$V^T M V = I, \quad V^T K V = \Omega^2$$

e, como $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta-impulso (??), tem-se

$$H(s) = \mathcal{L}(h(t)) = \mathcal{L}\left(V \frac{\sin \Omega t}{\Omega} V^T\right) = V[s^2I + \Omega^2]^{-1} V^T.$$

Também, sendo Ω^2 uma matriz diagonal (2.33), segue que

$$[s^2I + \Omega^2]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \end{bmatrix}.$$

Conclui-se que a matriz de transferência é dada por

$$H(s) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}.$$

ou, em forma equivalente,

$$H(s) = [s^2 M + K]^{-1} = V[s^2 I + \Omega^2]^{-1} V^T = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^T}{s^2 + \omega_k^2} . \quad (2.39)$$

Em particular, tem-se a função frequência matricial

$$H(i\omega) = [(i\omega)^2 M + K]^{-1} = V[(i\omega)^2 I + \Omega^2]^{-1} V^T = \sum_{k=1}^n \frac{u_k u_k^T}{\omega_k^2 - \omega^2} . \quad (2.40)$$

2.7 Sistemas de Segunda Ordem: Caso Geral

Considere-se a equação diferencial

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t), \quad (2.41)$$

onde M , C , K são matrizes arbitrárias $n \times n$, M não-singular. Suponha-se que x e suas derivadas são de ordem exponencial. Aplicando a transformada de Laplace a esta equação, obtém-se

$$Ms^2 X(s) - M\dot{x}(0) - Msx(0) + C[sX(s) - x(0)] + KX(s) = F(s).$$

Através de simplificações, decorre a equação operacional

$$\Delta(s)X(s) = M\dot{x}(0) + (sM + C)x(0) + F(s), \quad (2.42)$$

onde

$$\Delta(s) = s^2 M + sC + K,$$

e $X(s)$, $F(s)$ são as transformadas de Laplace de $x(t)$ e de $f(t)$, respectivamente.

A *solução fundamental* ou *resposta-impulso matricial*, ou a solução dinâmica, $h(t)$ é introduzida como a solução do problema

$$\begin{aligned} M\ddot{h} + C\dot{h} + Kh &= 0, \\ h(0) &= 0, \quad M\dot{h}(0) = I \end{aligned} \tag{2.43}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} M\ddot{h} + C\dot{h} + Kh &= \delta(t)I, \\ h(0) &= 0, \quad M\dot{h}(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Da equação operacional para $h(t)$, decorre

$$\Delta(s)H(s) = I, \tag{2.45}$$

ou seja, $H(s)$ é a transformada de Laplace de $h(t)$ e será denominada de *matriz de transferência* do sistema (2.62).

Observe-se que uma matriz não-singular comuta com sua inversa. Então, a rigor, tem-se que a matriz de transferência comuta com o polinômio matricial $\Delta(s)$, isto é,

$$\Delta(s)H(s) = H(s)\Delta(s) = I.$$

Assim, pré-multiplicando (2.42) por

$$\Delta^{-1}(s) = H(s),$$

decorre

$$X(s) = H(s)M\dot{x}(0) + (sH(s)M + H(s)C)x(0) + H(s)F(s).$$

Agora, com a transformada inversa de Laplace, obtém-se uma fórmula para as soluções de (2.62), em termos da resposta-impulso,

$$\boxed{x(t) = h(t)M\dot{x}(0) + \left(\dot{h}(t)M + h(t)C\right)x(0) + \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau.} \quad (2.46)$$

Esta equação (2.46) mostra que, para conhecer a *solução* do sistema (2.62), é suficiente determinar a resposta impulso associada ao mesmo.

Sob o ponto de vista físico, a resposta a um impulso unitário pode ser interpretada da seguinte maneira. Considere um sistema com n graus de liberdade

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0, \quad (2.47)$$

onde C e K são matrizes arbitrárias. Seja $x(t)$ a resposta diante das condições iniciais

$$M\dot{x}(0) = e_j, \quad x(0) = 0,$$

onde

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o j -ésimo vetor canônico. De acordo com (2.46), a solução de (2.47) é dada por

$$x(t) = h(t)e_j \quad (2.48)$$

e, assim, a k -ésima componente de $x(t)$ é

$$x_k(t) = e_k^T x(t) = e_k^T h(t)e_j = h_{kj}(t). \quad (2.49)$$

De (2.49), pode-se afirmar que o elemento $h_{kj}(t)$ da resposta-impulso $h(t)$ é a resposta da k -ésima componente do sistema, relativa a uma força unitária concentrada na j -ésima componente, e com forças nulas nas outras componentes do sistema. Por conseguinte, $H_{kj}(i\omega)$ é a resposta freqüência para a k -ésima componente, que corresponde a uma força concentrada no j -ésimo elemento do sistema.

2.7.1 Fórmulas fechadas para a resposta-impulso

Para que (2.46) seja rigorosamente a solução do problema inicial, é necessário justificar sua substituição na equação bem como verificar a existência de $h(t)$ e sua ordem exponencial e *encaixar* os dados iniciais quando $t \rightarrow 0^+$. Tem-se que

$$h(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) h_{2n-j} \quad (2.50)$$

onde os b_i são os coeficientes do *polinômio característico*

$$p(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = \sum_{i=0}^{2n} b_i \lambda^{2n-i}, \quad (2.51)$$

$d(t)$ a solução da equação diferencial característica

$$b_0 d^{(2n)}(t) + b_1 d^{(2n-1)}(t) + \dots + b_{2n-1} \dot{d}(t) + b_{2n} d(t) = 0, \quad (2.52)$$

$$d(0) = 0, \quad \dot{d}(0) = 0, \dots, d^{(2n-2)}(0) = 0, \quad b_0 d^{(2n-1)}(0) = 1,$$

e as matrizes $n \times n$ $h_j = h^{(j)}(0)$, satisfazem a equação em diferenças

$$\begin{aligned} M h_{j+2} + C h_{j+1} + K h_j &= 0, \\ M h_1 &= I, \quad h_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

A matriz de transferência é caracterizada como

$$H(s) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \frac{s^{j-1-i}}{p(s)} h_{2n-j} \quad (2.54)$$

Conclui-se que, para o cálculo da resposta-impulso matricial, é necessário considerar três equações características: uma algébrica (polinômio característico), uma analítica (equação diferencial para $h(t)$) e uma discreta (equação em diferenças para h_k , que corresponde a k -ésima derivada de $h(t)$ na origem).

A resposta-impulso pode, em princípio, ser descrita por uma série de Taylor e aproximada de maneira polinomial. Isto é, escrevendo

$$h(t) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \frac{t^j}{j!}, \quad (2.55)$$

onde $h_j = h^{(j)}(0)$, e substituindo em (2.43), obtém-se a equação recursiva

$$\begin{aligned} Mh_{j+2} + Ch_{j+1} + Kh_j &= 0, \\ Mh_1 &= I, \quad h_0 = 0. \end{aligned}$$

Porém, sob o ponto de vista numérico, o truncamento da série pode acarretar erros numéricos, como foi discutido por Moler e Van Loan (SIAM Rev, December 1978), para o caso da resposta-impulso associada a um sistema de primeira ordem (exponencial de uma matriz).

Por outro lado, o método espectral, isto é, a determinação de soluções do tipo exponencial $x(t) = e^{\lambda t}v$ para o sistema não forçado

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0,$$

conduz à resolução do problema de autovalor

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)v = 0, \quad v \neq 0. \quad (2.56)$$

Este procedimento equivale a determinar as raízes (autovalores de (2.56)) do *polinômio característico*

$$p(\lambda) = \det (\lambda^2 M + \lambda C + K) = \sum_{i=0}^{2n} b_i \lambda^{2n-i} \quad (2.57)$$

e, posteriormente, achar os autovetores ou modos v . Porém, como até hoje não estabelecido um teorema do tipo dos modos normais, ainda para matrizes M,C,K simétricas positivas definidas, o método espectral resulta ser restrito para sistemas gerais M,C,K.

2.7.1.1 O caso de raízes simples

Quando todas as raízes s_k de $p(s)$ forem distintas, a fórmula para $h(t)$ pode ser simplificada. Aqui, $h(t)$ é obtida de

$$h(t) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{e^{s_k t}}{p'(s_k)}$$

e, com a introdução dos polinômios

$$q_j(s) = \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{j-1-i}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \quad (2.58)$$

decorre

$$h(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \sum_{k=0}^{2n} \frac{s_k^{j-1-i} e^{s_k t} h_{2n-j}}{p'(s_k)}.$$

Deste modo,

$$h(t) = \sum_{k=0}^{2n} E_k e^{s_k t}, \quad H(s) = \sum_{k=0}^n \frac{E_k}{s - s_k}, \quad (2.59)$$

onde

$$E_k = \frac{1}{p'(s_k)} \sum_{j=1}^{2n} q_j(s_k) h_{2n-j}. \quad (2.60)$$

Para o caso de raízes simples, a derivada de $h(t)$ em $t = 0$ conduz à resposta-impulso discreta

$$h_j = \sum_{k=0}^{2n} E_k s_k^j. \quad (2.61)$$

2.7.2 Exemplos numéricos

As fórmulas para $h(t)$ e $H(s)$ são obtidas facilmente, na implementação de sistemas de pequeno porte, com o uso de "softwares" simbólicos ou numéricos, tais como o Maple ou o Matlab.

Exemplo 1

Determinar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cos 2t \\ 3t \end{bmatrix}$$

$$q(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solução

Tem-se o polinômio característico

$$p(s) = \det(s^2 M + sC + K) = s^4 + 6s^3 + 19s^2 + 37s + 26.$$

A solução da equação diferencial característica

$$h^{(4)}(t) + 6h^{(3)}(t) + 19\ddot{h}(t) + 37\dot{h}(t) + 26h(t) = 0,$$

com os valores iniciais

$$h(0) = \dot{h}(0) = \ddot{h}(0) = 0, \quad h^{(3)}(0) = 1,$$

é dada, de modo aproximado, por

$$\begin{aligned} h(t) = & -0.072239 e^{(-2.7255 t)} + 0.10396 e^{(-1.2665 t)} \\ & -0.031716 e^{(-1.0040 t)} \cos(2.5543 t) \\ & -0.038004 e^{(-1.0040 t)} \operatorname{sen}(2.5543 t). \end{aligned}$$

Para a equação característica em diferenças

$$Mh_{k+2} + Ch_{k+1} + Kh_k = 0, \quad h_0 = 0, \quad Mh_1 = I, \quad k = 0 : 1,$$

tem-se

$$h_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores obtidos acima em

$$h(t) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} b_i h^{(j-1-i)}(t) h_{4-j}$$

e com o cálculo da integral

$$q(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

obtem-se

$$q_1(t) = 0.982 \cos 2t + 1.13 \operatorname{sen} 2t + 0.345t - 0.0307 + 0.0182e^{-2.73t}$$

$$- 0.0979e^{-1.27t} - 0.872e^{-t} \cos 2.55t - 1.39e^{-t} \operatorname{sen} 2.55t$$

$$q_2(t) = 0.528 \cos 2t + 0.536 \operatorname{sen} 2t + 0.577t - 0.475 - 0.156e^{-2.73t}$$

$$+ 0.590e^{-1.27t} - 0.486e^{-t} \cos 2.55t - 0.712e^{-t} \operatorname{sen} 2.55t$$

Observe-se que a solução $q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$ é a superposição da solução permanente $x_p(t)$, a qual corresponde ao termo forçante dado, e a solução do sistema homogêneo, a solução transiente $x_{hc}(t)$.

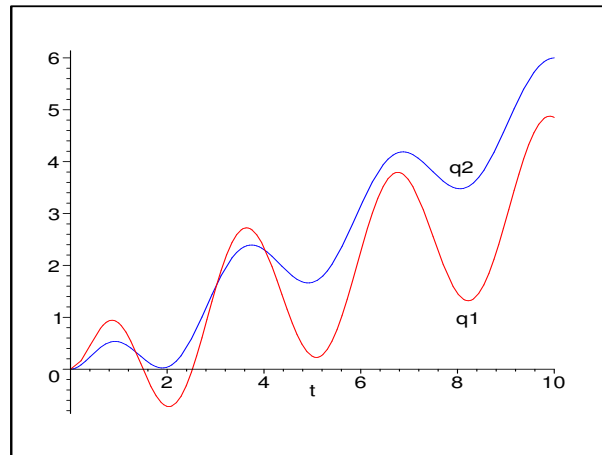


Figura 2.3: Respostas $q_1(t)$ e $q_2(t)$

Exemplo 2

Determinar a solução do sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sujeito às condições iniciais

$$q(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solução

Tem-se o polinômio característico

$$p(s) = \det[s^2 M + sC + K] = 2s^6 + 4s^5 + 4s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 4s + 2.$$

A solução da equação

$$2h^{(6)}(t) + 4h^{(5)}(t) + 4h^{(4)}(t) + 4h^{(3)}(t) + 4\ddot{h}(t) + 4\dot{h}(t) + 2h(t) = 0,$$

com os valores iniciais

$$h(0) = \dot{h}(0) = \ddot{h}(0) = \dddot{h}(0) = h^{(iv)}(0) = 0, \quad 2h^{(5)}(0) = 1,$$

é dada por

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{12}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ - \frac{1}{12}e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{36}e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Os valores de h_j , para $j = 2 : 5$, são obtidos por recursão, através da equação matricial em diferenças

$$Mh_{k+2} + Ch_{k+1} + Kh_k = 0, \quad h_0 = 0, \quad Mh_1 = I.$$

Assim, com $h_0 = 0$, a matriz nula é obtida, e as demais são dadas por

$$h_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ h_4 = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad h_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Agora, serão calculadas $h(t)$ e sua derivada, $\dot{h}(t)$, através da fórmula fechada.

Substituindo os valores em

$$q(t) = [\dot{h}(t)M + h(t)C]q(0) + h(t)M\dot{q}(0),$$

obtem-se

$$q_1(t) = \frac{15t-9}{9}e^{-t} + 2e^{t/2}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2}{3\sqrt{3}}\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right];$$

$$q_2(t) = \frac{5t-14}{6}e^{-t} - e^{t/2}\left[\frac{5}{12}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{7}{12\sqrt{3}}\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right] \\ + e^{-t/2}\left[\frac{19}{4}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{9}{4\sqrt{3}}\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right];$$

$$q_3(t) = \frac{10}{3}e^{-t} + e^{t/2}\left[\frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right] - e^{-t/2}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{4}{\sqrt{3}}\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right].$$

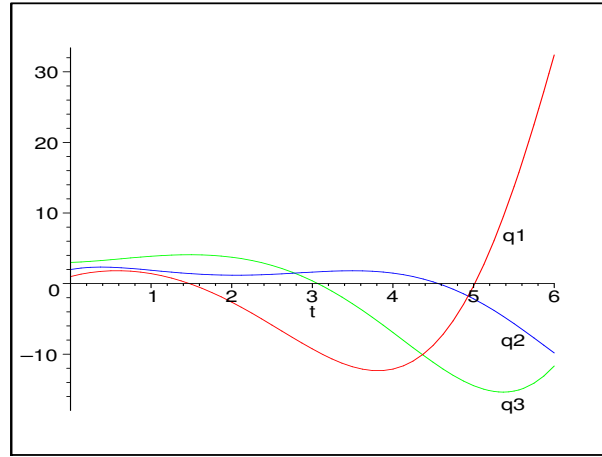


Figura 2.4: Respostas $q_1(t)$, $q_2(t)$ e $q_3(t)$

2.7.2.1 Formulação de Estado

Na literatura, o tratamento da equação geral de segunda ordem

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t),$$

é realizada através da transformação de Hamilton

$$x_1 = u, \quad x_2 = \dot{u}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Obtém-se o sistema de primeira ordem

$$\dot{x} = Ax + F(t), \quad (2.62)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

é a matriz companheira de ordem $2n \times 2n$, x o vetor de estado $2n \times 1$ e $F(t) = \text{col}[0 \quad f(t)]$ o termo não-homogêneo $2n \times 1$.

Isto tende, em princípio, a obscurecer propriedades naturais da equação de segunda ordem e ser não muito estético em termos de teoria. Porém, permite adaptar varias propriedades dos sistemas de primeira ordem para os sistemas de segunda ordem quando formulados em termos da base dinâmica.

Soluções exponenciais $x = e^{t\lambda}v$, $v \neq 0$, originam autovetores da forma

$$y = \begin{bmatrix} v \\ \lambda v \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

onde v é um autovetor do sistema de segunda ordem e λ seu correspondente autovalor, isto é, v satisfaz $[\lambda^2 M + \lambda C + K]v = 0$.

É fácil estabelecer que

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} h_0(t) & h_1(t) \\ h'_0(t) & \dot{h}_1(t) \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Pois, denotando $E(t)$ o termo da direita, verifica-se, com uso das propriedades da base $h_o(t), h_1(t)$ que $E(0)$ é a matriz identidade. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) - AE(t) &= \begin{bmatrix} \dot{h}_0(t) & \dot{h}_1(t) \\ \ddot{h}_0(t) & \ddot{h}_1(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0(t) & h_1(t) \\ \dot{h}_0(t) & \dot{h}_1(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}Kh_o - M^{-1}C\dot{h}_o & -M^{-1}Kh_1 - M^{-1}C\dot{h}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Por diferenciação da matriz exponencial, obtém-se a seguinte representação para as potências da matriz companheira:

$$A^k = \begin{bmatrix} h_{o,k} & h_{1,k} \\ h_{o,k+1} & h_{1,k+1} \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

onde $h_{0,k} = h_0^{(k)}(0)$ satisfaz o problema discreto de valor inicial

$$Mq_{k+2} + Cq_{k+1} + Kq_k = 0 \quad (2.67)$$

$$q_o = I, Mq_1 = 0 \quad (2.68)$$

e $h_{1,k} = h_1^{(k)}(0)$ satisfaz o problema discreto de valor inicial

$$Mq_{k+2} + Cq_{k+1} + Kq_k = 0 \quad (2.69)$$

$$q_o = 0, Mq_1 = I \quad (2.70)$$

As seguintes propriedades são uma extensão de aquelas que aparacem com seno e cosseno no caso de sistemas não-conservativos ($C = 0$). Elas decorrem da propriedade de semi-grupo da matriz exponencial e da sua representação em termos da base dinâmica normalizada $h_o(t), h_1(t)$.

$$h_1(t+s) = h_0(t)h_1(s) + h_1(t)\dot{h}(s), \quad (2.71)$$

$$\dot{h}_1(t+s) = \dot{h}_0(t)h_1(s) + \dot{h}_1(t)\dot{h}_1(s).$$

ou, em termos da base dinâmica $h(t), \dot{h}(t)$

$$h(t+s) = h_0(t)h(s) + h(t)Mh'(s), \quad (2.72)$$

$$h'(t+s) = h'_0(t)h(s) + h'(t)Mh'(s).$$

Através da diferenciação da matriz exponencial e uso da fórmula para as potências da matriz companheira, obtém-se uma propriedade geral de permuta de derivadas (*shifting*) nas derivadas da solução fundamental $h(t)$ quando descrita pela fórmula

$$h(t) = \sum_{j=1}^{(2n)} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(t) h_{2n-j}.$$

Tem-se

$$h^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{(2n)} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(t) h_{2n-j+k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.73)$$

Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton com a matriz exponencial, e novamente a fórmula para as potências da matriz companheira, pode ser formulada uma extensão do referido teorema para duas matrizes. Tem-se

$$\sum_{i=0}^{2n} b_i h_{2n-j+p} = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.74)$$

Devemos observar que a validade dessa identidade é em certa forma análoga ao caso de multiplicar a identidade de Cayley-Hamilton de uma matriz A por uma potência dela.

3 EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS LINEARES

3.1 Introdução

O estudo das equações em diferenças de ordem N

$$\sum_{j=0}^N A_j u_{k+j} = f_k \quad (3.1)$$

onde os coeficientes A_j são matrizes de ordem $n \times n$, $u_k = u(k)$ a *função incógnita* e $r_k = r(k)$, k inteiro, o termo não-homogêneo ou excitação de ordem $n \times 1$, pode ser feito de maneira direta, inferindo resultados a partir do que é desenvolvido para equações de primeira e segunda ordem, ou, de maneira indireta com o uso da formulação de estado que reduz uma equação de ordem N para uma de primeira ordem. Isto último é encontrado na literatura, daí que nossa ênfase seja, na medida do possível, de forma direta. Para tanto, serão utilizados os três princípios das equações lineares, enunciados a seguir.

Por simplicidade, a discussão apresentada será restrita a termos não-homogêneos que sejam nulos para tempo negativo.

Pode-se considerar, também, o caso em que

$$f_k = r_k + \sum_{j=0}^M B_j y_{k+j}, \quad N \geq M, \quad (3.2)$$

onde os coeficientes B_j são matrizes de ordem $n \times p$; os y_j são vetores $p \times 1$ e o r_k é um termo não-homogêneo. Certamente, o sistema

$$\sum_{j=0}^N A_j u_{k+j} = r_k, \quad (3.3)$$

é equivalente ao sistema com termo não-homogêneo (3.8), fazendo-se $f_k = r_k$, $B_j = 0$ para $j = 0 : M$.

Nas aplicações, usualmente r_k pode ser de natureza forçante, isto é, denotar um termo simples

$$f_k = r_k, \quad (3.4)$$

ou um termo que descreva uma dinâmica de controle

$$f_k = \sum_{j=0}^M B_j y_{k+j}, \quad (3.5)$$

onde os coeficientes B_j são constantes e $y_k = y(k)$ denota a variável de controle.

Com o propósito de considerar ambos tipos de sistemas, pode ser assumido que f_k é uma combinação de ambos, ou seja,

$$f_k = \sum_{j=0}^M B_j y_{k+j} + r_k. \quad (3.6)$$

1. PRINCÍPIO DA DECOMPOSIÇÃO

A solução da equação linear não-homogênea pode ser decomposta na soma de uma solução homogênea geral e uma solução não-homogênea particular. Assim, a solução de (3.1) pode ser escrita

$$u_k = u_{h,k} + u_{p,k},$$

onde $u_{h,k}$ é solução da equação homogênea

$$\sum_{j=0}^N A_j u_{k+j} = 0, \quad (3.7)$$

e $u_{p,k}$ uma solução particular da equação não-homogênea (3.1).

2. PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

- A combinação linear de soluções homogêneas é solução homogênea.

- Se o termo não-homogêneo é uma combinação linear de funções $\alpha f + \beta g$, então a solução é a combinação linear com as soluções correspondentes as funções, isto é, $\alpha u_f + \beta u_g$.

3. PRINCÍPIO DA REPRESENTAÇÃO

Existe uma solução fundamental que carrega toda a informação de uma equação diferencial linear.

Este último princípio será mostrado de maneira formal, através da obtenção de uma fórmula de variação de parâmetros com o uso do método operacional da transformada de Laplace e supondo o caso *regular* em que a matriz A_N é não-singular. A validade dessa metodologia será posteriormente estabelecida de maneira rigorosa.

3.2 Representação das Soluções

Por simplicidade, a discussão apresentada será restrita a termos não-homogêneos que sejam nulos para tempo negativo. Pode-se considerar, também, o caso em que

$$f_k = r_k + \sum_{j=0}^M B_j y_{k+j}, \quad N \geq M, \quad (3.8)$$

onde os coeficientes B_j são matrizes de ordem $n \times p$; os y_j são vetores $p \times 1$ e o r_k é um termo não-homogêneo. Certamente, o sistema

$$\sum_{j=0}^N A_j u_{k+j} = r_k, \quad (3.9)$$

é equivalente ao sistema com termo não-homogêneo (3.8), fazendo-se $f_k = r_k$, $B_j = 0$ para $j = 0 : M$.

O sistema (3.1) pode ser discutido com o uso da transformada de Laplace em tempo discreto, denominada transformada \mathcal{Z} ou combinando-se a formulação contínua obtida anteriormente com o uso de série de potências, conforme [Claeyssen, 1990b]. Neste

trabalho, será abordado a segunda opção. Considere-se o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} A_N u_{k+N} + A_{N-1} u_{k+N-1} + \dots + A_1 u_{k+1} + A_0 u_k &= f_k \\ u_0 &= u_0^o, u_1 = u_1^o, \dots, u_{N-1} = u_{N-1}^o, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde os valores de u_k são fornecidos para $k=0:N-1$.

A solução fundamental $h(t)$ de um sistema em tempo contínuo satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} A_N h^{(N)}(t) + A_{N-1} h^{(N-1)} + \dots + A_1 \dot{h}(t) + A_0 h(t) &= 0 \\ h(0) = 0, \dot{h}(0) = 0, \dots, h^{(N-2)}(0) = 0, A_N h(N-1)(0) &= I. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Escrevendo

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{t^k}{k!}, \quad h_k = h^{(k)}(0). \quad (3.12)$$

e substituindo-se (3.12) no problema inicial em tempo contínuo (3.11), decorre que h_k é solução do problema inicial discreto

$$\begin{aligned} A_N h_{k+N} + A_{N-1} h_{k+N-1} + \dots + A_1 h_{k+1} + A_0 h_k &= 0 \\ h_0 = 0, h_1 = 0, \dots, h_{N-2} = 0, A_N h_{N-1} &= I, \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo I a matriz identidade de ordem n .

Esta solução matricial será referida como a *solução fundamental discreta* do sistema (3.1) quando considera-se $k = -\infty : \infty$ ou de *resposta a um impulso discreto* quando definida nula para tempo negativo. Certamente, para tempo positivo ambas coincidem.

Decorre de (1.15), que h_k satisfaz também

$$h_{k+N} A_N + h_{k+N-1} A_{N-1} + \dots + h_{k+1} A_1 + h_k A_0 = 0, \quad (3.14)$$

ou seja, h_k é uma solução à esquerda e à direita.

Além disso, o problema inicial dado pela equação (3.13) é equivalente para $k > 0$ com o problema inicial

$$\begin{aligned} A_N h_{k+N} + A_{N-1} h_{k+N-1} + \dots + A_1 h_{k+1} + A_0 h_k &= \delta(k) \\ h_0 = 0, h_1 = 0, \dots, h_{N-2} = 0, h_{N-1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

com $\delta(k)$ definida como a função discreta

$$\delta(k) = \begin{cases} 0, & \text{para } k = 0 \\ 1, & \text{para } k \neq 0 \end{cases}, \quad (3.16)$$

e que permite escrever a matriz identidade na forma

$$I = [\delta(i - j)] \quad \text{para } i, j = 1 : n. \quad (3.17)$$

É conveniente salientar que se os coeficientes A_k são matrizes simétricas, então a solução h_k é também uma matriz simétrica.

EXERCÍCIO

Mostrar que se os coeficientes A_k são matrizes simétricas, então a solução fundamental discreta h_k é também uma matriz simétrica.

Considerando

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \frac{t^k}{k!}, \quad u_k = u^{(k)}(0). \quad (3.18)$$

e substituindo-se (3.12) no problema inicial em tempo contínuo

$$\begin{aligned} A_N u^{(N)}(t) + A_{N-1} u^{(N-1)} + \dots + A_1 \dot{u}(t) + A_0 u(t) &= f(t) \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \dots, u^{(N-1)}(0) &= u_{N-1} 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

decorre que u_k é solução do problema inicial discreto

$$\begin{aligned} A_N u_{k+N} + A_{N-1} u_{k+N-1} + \dots + A_1 u_{k+1} + A_0 u_k &= f_k \\ u_0 = u(0), u_1 = \dot{u}(0), \dots, u_{N-1} = 0 &= u^{(N-1)}(0). \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde assume-se que $f(t)$ é um termo não-homogêneo da forma

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{t^k}{k!}, \quad f_k = f^{(k)}(0). \quad (3.21)$$

Do estudo feito no capítulo 1 para sistemas em tempo contínuo, decorre de (1.17) que a solução do problema inicial (3.10) é dada pela *fórmula de variação de parâmetros discreta*

$$u_k = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h_{j-1-i} A_j u_i^0 + \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i-1} f_i. \quad (3.22)$$

Seguindo (1.18), são introduzidas as funções discretas

$$h_{k,j} = \sum_{i=0}^{N-j-1} h_{k+i} A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N-1, \quad (3.23)$$

e segue-se que a solução do problema inicial (3.10) pode ser escrita na forma

$$u_k = \sum_{j=0}^{N-1} h_{k,j} u_j^0 + \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i-1,N} A_N^{-1} f_i. \quad (3.24)$$

Deve ser observado que a solução dinâmica discreta, h_k , gera as bases $[h_{k,0}, h_{k,1}, \dots, h_{k,N-1}]$ e $[h_k, h_{k+1}, \dots, h_{k+N-1}]$, pois o casoratiano (wronskiano discreto) é não singular.

Com o termo não-homogêneo (3.8), segue de (1.31) que a solução do problema inicial é dada por

$$u_k = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h_{j-1-i} A_j u_i^0 - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} h_{j-1-i} B_j y_i^0 + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^M h_{j+k-1-i} B_j y_i + \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i-1} r_i. \quad (3.25)$$

Os dois primeiros termos do segundo membro correspondem à solução homogênea do sistema, introduzida pelas condições iniciais da saída e da entrada e os dois últimos formam a resposta forçada, devido aos termos y_k e r_k , respectivamente.

Considerando-se condições iniciais nulas, tanto do termo y_k quanto da solução u_k , decorre de (3.25) que a resposta forçada é dada pela soma de *convoluções discretas*

$$u_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^M h_{j+k-1-i} B_j \right) u_i + \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-1-i} f_i = g_k * y_k + h_k * r_k, \quad (3.26)$$

onde

$$g_k = \sum_{j=0}^M h_{k+j} B_j, \quad (3.27)$$

corresponde a *resposta impulso discreta*.

Para entradas do tipo exponenciais, $y_k = z^k v$ e $f_k = 0$, têm-se saídas do mesmo tipo, $u_k = z^k G(z) v$, onde $G(z)$ corresponde a *função de transferência discreta* dada por

$$G(z) = \sum_{j=0}^M z^{j-1} H(z) B_j, \quad (3.28)$$

sendo

$$H(z) = z \left(\sum_{i=0}^N A_i z^i \right)^{-1}, \quad (3.29)$$

denominada *função do sistema*.

3.2.1 Formulação no Espaço de Estado

Os sistemas discretos de ordem n

$$\sum_{j=0}^N A_j u_{k+j} = f_k, \quad (3.30)$$

sendo os coeficientes A_j matrizes de ordem n ; y_k e f_k funções vetoriais em k , com condições iniciais dadas por

$$u_0, u_1, \dots, u_{N-1}. \quad (3.31)$$

podem ser transformados em sistemas de primeira ordem com o uso da transformação de Hamilton. Define-se a sequência de N vetores de ordem n denotados por

$$\begin{aligned} z_{1,k} &= y_k \\ z_{2,k} &= y_{k+1} \\ &\vdots \\ z_{N,k} &= y_{k+N-1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

A equação discreta (3.30) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} z_{1,k+1} &= z_{2,k} \\ z_{2,k+1} &= z_{3,k} \\ &\vdots \\ z_{N-1,k+1} &= z_{N,k} \\ z_{N,k+1} &= -A_N^{-1}A_0z_{1,k} - A_N^{-1}A_1z_{2,k} - \cdots - A_N^{-1}A_{N-2}z_{N-1,k} - A_N^{-1}A_{N-1}z_{N,k} + A_N^{-1}f_k. \end{aligned} \quad (3.33)$$

As N equações podem ser escritas na forma matricial por um equação em diferenças de primeira ordem

$$\mathcal{Z}_{k+1} = \mathcal{A}\mathcal{Z}_k + \mathcal{F}_k, \quad (3.34)$$

onde

$$\mathcal{Z}_k = \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \\ \vdots \\ z_{N,k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1}f_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_N^{-1}A_0 & -A_N^{-1}A_1 & -A_N^{-1}A_2 & \cdots & -A_N^{-1}A_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Na literatura, a matriz \mathcal{A} é denominada *matriz companheira discreta* e o vetor \mathcal{Z}_k *vetor de estado discreto*.

Da teoria desenvolvida, resulta que a solução de uma equação não homogênea de primeira ordem discreta é dada pela fórmula

$$\mathcal{Z}_k = h_k \mathcal{Z}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-1-j} \mathcal{F}_j, \quad (3.36)$$

onde h_k é a solução matricial do problema de valor inicial discreto

$$h_{k+1} = \mathcal{A}h_k, \quad h_0 = I. \quad (3.37)$$

Neste caso, tem-se a fórmula de variação de parâmetros

$$z_k = \mathcal{A}^k z_+ + \sum_{r=0}^{k-1} \mathcal{A}^{k-1-r} f_r, \quad (3.38)$$

onde as potências da matriz companheira \mathcal{A} podem ser identificadas em termos dos elementos da base $[h_{0,k}, h_{1,k}, \dots, h_{N-1,k}]$ onde $h_{N-1,k} = h_k$ corresponde à solução fundamental do sistema

$$\sum_{j=0}^N A_j u_{k+j} = f_k. \quad (3.39)$$

Para tanto, utiliza-se a relação (??) para a exponencial da matriz companheira. Decorre que

$$\mathcal{A}^k = \begin{bmatrix} h_{0,k} & h_{1,k} & \cdots & h_{N-2,k} & h_k A_N \\ h_{0,k+1} & h_{1,k+1} & \cdots & h_{N-2,k+1} & h_{k+1} A_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ h_{0,k+N-1} & h_{1,k+N-1} & \cdots & h_{N-2,k+N-1} & h_{k+N-1} A_N \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

EXERCÍCIO

Mostrar a relação (3.40).

3.3 Cálculo das Soluções

Do ponto de vista numérico, as soluções de sistemas discretos são usualmente calculadas recursivamente até um número finito de iterações. Porém, no caso de sistemas lineares é possível determinar suas soluções através de técnicas semelhantes ao caso de sistemas contínuos.

Considere-se sistemas lineares discretos representados por

$$\sum_{j=0}^N A_j y_{k+j} = f_k, \quad (3.41)$$

com condições iniciais

$$y_0, y_1, \dots, y_{N-1}. \quad (3.42)$$

3.3.1 Método Espectral

O método espectral para resolução de sistemas discretos descritos pela equação (3.41) se aplica quando o problema associado de autovalor denotado por

$$\left(\sum_{j=0}^N A_j \lambda^j \right) v = 0, \quad \text{para } v \neq 0, \quad (3.43)$$

gera a partir de seus Nn autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{Nn})$ e dos autovetores correspondentes $(v_1, v_2, \dots, v_{Nn})$ uma matriz V de ordem Nn , dada por

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} v_1 & \lambda_2^{N-1} v_2 & \cdots & \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_o \\ V_o D \\ \vdots \\ V_o D^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

com colunas linearmente independentes. Nesta expressão D é uma matriz diagonal de ordem Nn denominada *matriz espectral*, cujos elementos da diagonal correspondem aos

autovalores do problema e V_o é a matriz cujas colunas são os autovetores associados, ou seja, denotam-se por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{Nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V_o = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Em particular, este resultado é verificado quando o sistema possui todos os autovalores distintos.

Para resolver o problema inicial homogênea,

$$\begin{aligned} A_N u_{k+N} + A_{N-1} u_{k+N-1} + \cdots + A_1 u_{k+1} + A_0 u_k &= 0, \\ u(0) = u_o, \dot{u}(0) = \dot{u}_o, \dots, u^{(N-1)}(0) &= u_o^{(N-1)} \end{aligned}$$

procura-se uma solução da forma

$$u_k = \sum_{j=0}^{Nn} c_j \lambda_j^k v_j = \Phi(k)c \quad (3.46)$$

onde

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k v_1 & \lambda_2^k v_2 & \cdots & \lambda_{nN}^k v_{nN} \end{bmatrix}$$

Deste modo as constantes c_j são obtidas utilizando os valores iniciais, isto é, resolvendo-se o sistema

$$\begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} v_{Nn} &= y_0 \\ c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn} v_{Nn} &= y_1 \\ \vdots &= \vdots \\ c_1 \lambda_1^{N-1} v_1 + c_2 \lambda_2^{N-1} v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} &= y_{N-1} \end{aligned}$$

cujas matrizes dos coeficientes do sistema correspondem à matriz V . No caso não-homogêneo,

$$\begin{aligned} A_N u_{k+N} + A_{N-1} u_{k+N-1} + \cdots + A_1 u_{k+1} + A_0 u_k &= f_k, \\ u(0) = u_o, \dot{u}(0) = \dot{u}_o, \dots, u^{(N-1)}(0) &= u_o^{(N-1)} \end{aligned}$$

considera-se a solução como uma superposição linear

$$u_k = u_{h,k} + u_{p,k}$$

com $u_{h,k}$ solução homogênea e $u_{p,k}$ uma solução particular.

O cálculo de uma solução particular é de acordo com a natureza do termo não-homogêneo e ordem da equação. Para f_k simples, por exemplo, uma exponencial $a^k v$ ou um polinômio em k , utiliza-se o método dos coeficientes a determinar. Suponha-se que $u_{p,k}$ é uma solução particular. Então,

$$u_k = \Phi(k)c + u_{p,k}$$

e o valor da constante é obtido utilizando o valor inicial, ou seja

$$c = V^{-1}(u_0 - u_{p,0}).$$

Em geral, o método espectral pode ser utilizado de maneira direta com equações de primeira ordem. Para isto o termo não-homogêneo é decomposto em componentes relativas à base de autovetores e, resolve-se com relação a cada componente. Para sistemas de ordem N , esta decomposição precisa de maior estudo. No caso de um termo f_k de natureza geral, poderia ser utilizado o método de Lagrange da variação dos parâmetros. Porém, este método será considerado como um dos métodos não-espectrais uma vez que utiliza qualquer base de soluções, não necessariamente a base espectral.

EXERCÍCIO Obter uma solução particular da $u_{k+1} = Au_k + f_k$, $f_k = a^k$, pelo método dos coeficientes a determinar. O que acontece se a é autovalor de A ?

EXERCÍCIO

Considere a equação de primeira ordem $u_{k+1} = Au_k + f_k$. Suponha-se A uma matriz não-defeituosa de ordem n , cujos autovalores são denotados por $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ e os autovetores correspondentes dados por (v_1, v_2, \dots, v_n) . a) Escreva-se

$$f_k = VV^{-1}f_k = d_{1,k}v_1 + d_{2,k}v_2 + \dots + d_{n,k}v_n, \quad (3.47)$$

onde V corresponde a matriz modal. Determine as componentes $d_{j,k}$ em termos das linhas w_i^T , $i=1:n$ da matriz inversa V^{-1} .

b) Considere uma solução da forma

$$u_k^p = u_{1,k}^p + u_{2,k}^p + \dots + u_{n,k}^p,$$

com $u_{j,k}^p = g_{j,k}v_j$ do mesmo tipo que a componente $d_{j,k}v_j$ do termo f_k , relativa ao autovetor v_j . Mostrar que

$$g_{j,k} = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_j^{k-1-r} d_{j,r}.$$

EXERCÍCIO

Seja $A = VDV^{-1}$. Utilize a mudança de variável $u = Vq$ para obter um sistema desacoplado. Obtenha a solução do problema inicial $u_{k+1} = Au_k + f_k, u_0$ dado.

EXERCÍCIO

Fazer um estudo espectral para equação de ordem N utilizando a formulação de estado, ou seja, a matriz A do sistema de primeira ordem corresponde a matriz companheira do sistema de ordem N .

3.3.1.1 Métodos Não-Espectrais

Para equações em diferenças lineares de ordem N , podem ser utilizado o método operacional através da transformada discreta \mathcal{Z} ; sendo que o uso da transformada

discreta permite a obtenção de uma fórmula para a resposta impulso discreta [Claeyssen, 1999], e o método de variação de parâmetros com uma base qualquer.

• Método de Variação de Parâmetros

Aplicando-se o método no sistema discreto definido por

$$\begin{aligned} A_N u_{k+N} + A_{N-1} u_{k+N-1} + \cdots + A_1 u_{k+1} + A_0 u_k &= f_k, \\ u(0) = u_o, \dot{u}(0) = \dot{u}_o, \cdots, u^{(N-1)}(0) &= u_o^{(N-1)} \end{aligned}$$

tem-se que a solução pode ser escrita por

$$u_k = c_{1,k} \phi_{1,k} + c_{2,k} \phi_{2,k} + \cdots + c_{Nn,k} \phi_{Nn,k} = \Phi_k \mathbf{c}_k,$$

onde $\Phi_k = [\phi_{1,k} \ \phi_{2,k} \ \cdots \ \phi_{Nn,k}]$ é uma base de soluções da equação homogênea associada.

Para determinar as funções $c_{j,k}$ assume-se as condições de Lagrange

$$\Phi_{k+m} \Delta \mathcal{C}_k = 0, \quad \text{para } m = 1 : N - 1,$$

onde $\Delta \mathcal{C}_k = \mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_k$. Assim,

$$u_{k+m} = \Phi_{k+m} \mathbf{c}_k, \quad \text{para } m = 1 : N - 1.$$

Substituindo-se u_k e suas translações dadas por (3.48) no sistema (??) e, considerando-se o fato de que cada coluna de Φ_k é solução resulta

$$A_N \Phi_{k+N} \Delta \mathcal{C}_k = f_k.$$

Assim, as expressões (3.48) e (3.48) formam o sistema linear

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{Nn} \Delta c_{j,k} \phi_{j,k+1} &= 0 \\
\sum_{j=1}^{Nn} \Delta c_{j,k} \phi_{j,k+2} &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{j=1}^{Nn} \Delta c_{j,k} \phi_{j,k+N-1} &= 0 \\
\sum_{j=1}^{Nn} A_N \Delta c_{j,k} \phi_{j,k+N} &= f_k
\end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,k+1} & \phi_{2,k+1} & \cdots & \phi_{Nn,k+1} \\ \phi_{1,k+2} & \phi_{2,k+2} & \cdots & \phi_{Nn,k+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{1,k+N} & \phi_{2,k+N} & \cdots & \phi_{Nn,k+N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_1 \\ \Delta c_2 \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix}.$$

Denotando-se,

$$V = \begin{bmatrix} \phi_{1,k+1} & \phi_{2,k+1} & \cdots & \phi_{Nn,k} \\ \phi_{1,k+2} & \phi_{2,k+2} & \cdots & \phi_{Nn,k+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{1,k+N} & \phi_{2,k+N} & \cdots & \phi_{Nn,k+N} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} \Delta c_{1,k} \\ \Delta c_{2,k} \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn,k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix},$$

o sistema pode ser representado de forma compacta

$$V \Delta \mathcal{C}_k = \mathcal{F}_k.$$

Resolvendo-o em termos das componentes do vetor $\Delta \mathcal{C}_k$, obtém-se

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + V^{-1} \mathcal{F}_k.$$

A solução da equação em diferenças matricial de primeira ordem (3.48) é dada por

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{c}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{V}^{-1} \mathcal{F}_j.$$

Desta forma a solução do sistema (??) pode ser escrita como

$$y_k = \Phi_k \mathbf{c}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_k \mathbf{V}^{-1} \mathcal{F}_j.$$

O vetor \mathbf{c}_0 é obtido a partir das condições iniciais do problema, ou seja,

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{V}^{-1} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}.$$

• Fórmula Discreta

A resposta impulso discreta h_k pode ser obtida de forma direta, sem utilizar-se a formulação de espaço de estado, por simples derivação da fórmula (2.50,n=2) para a solução fundamental correspondente ao caso contínuo.

A resposta impulso discreta corresponde a solução do problema de valor inicial discreto dado pela equação matricial em diferenças

$$\sum_{j=0}^N A_j h_{k+j} = 0,$$

sendo $h_k = h^k(0)$ e os valores iniciais dados por

$$h_0 = 0, \quad h_1 = 0, \quad \dots, \quad h_{N-2} = 0, \quad A_N h_{N-1} = I.$$

Decorre que $h_k = h^{(k)}(0)$ é dada por

$$h_k = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d_{k+j-i-1} h_{Nn-j},$$

onde os parâmetros b_i são os coeficientes do polinômio característico associado ao sistema, denotado por

$$P(z) = \det \left[\sum_{j=0}^N A_j z^j \right] = \sum_{k=0}^{Nn} b_k z^k;$$

a função discreta $d_k = d^{(k)}(0)$ corresponde a solução da equação em diferenças escalar

$$b_{Nn} d_{k+Nn} + b_{Nn-1} d_{k+Nn-1} + \cdots + b_1 d_{k+1} + b_0 d_0 = 0,$$

com valores iniciais

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_{Nn-2} = 0, \quad b_{Nn} d_{Nn-1} = 1.$$

Observe-se que aplicando-se a transformada \mathcal{Z} em (3.48) obtém-se a matriz de transferência cuja expressão é

$$H(z) = z \left(\sum_{j=0}^N A_j z^j \right)^{-1} = \frac{Q(z)}{P(z)},$$

sendo

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i z^{j-i-1} h_{Nn-j}. \quad (3.48)$$

Referências Bibliográficas

- [BAK 69] BAKARAT R, E. BAUMANN, Mth power of an $N \times N$ matrix and its connection with the generalized Lucas polynomials. *J. Math. Phys.*, Vol 10, 1969.
- [BAT 76] BATHE, K., WILSON, E. *Numerical Methods for Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976
- [BEN 71] BENDAT, J., PIERSOL, A. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley-Interscience, 1971.
- [BLE 77] BLEVINS, R.D. *Flow-Induced Vibration*. Van Nostrand, New York, 1977.
- [BRU 82] BRUSCHI M, RICCI P. E., An explicit formula for $f(A)$ and the generalized Lucas Polynomials. *SIAM J. Math Anal.*, Vol. 13, 1982.
- [CAN 95] CANAHUALPA, G., CLAEYSSSEN J.C.R., Numerical Integration of Damped Systems, *ICIAM 95*, Hamburgo, 1995.
- [CAU 65] CAUGHEY, T.K., O'KELLEY, M.E. Classical Normal Modes in Damper Linear Dynamic Systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*. Vol. 49, 867-870.
- [CHO 74] CHOPRA, A.K., GUTIERREZ, J.A. Earthquake Response Analysis of Multistorey Buildings including Foundation Interaction. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 3, 65-77, 1974
- [CLA 82] CLAEYSSSEN, J.C.R. Equações Diferenciais Matriciais. *Instituto de Matemática*, UFRGS, Porto Alegre, 1982
- [CLA 88] CLAEYSSSEN, J.C.R. Introdução às Funções Matriciais. *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 2^a. sér. v. 9, 59-76, 1988

- [CLA 90a] CLAEYSSSEN, J.C.R. On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 140(1): 73-84, 1990.
- [CLA 90b] CLAEYSSSEN, J.C.R., TSUKAZAN, T. Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. XLVIII, N^o 1, 1990.
- [CLA 95] CLAEYSSSEN, J.C.R., Time and Frequency Response in Non-Classical Vibrating Systems *Proceeding of ICIAM 95*, GAMM, Hamburgo, 1995.
- [CLA 98] CLAEYSSSEN, J.C.R., CANAHUALPA, G., JUNG, C., A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating systems, *Applied and Numerical Mathematics*, Elsevier, 1998.
- [CLA 99] CLAEYSSSEN, J.C.R., An Extension of the Cayley-Hamilton Identity for Characteristic Polynomials involving Several Matrices, Technical report, LNCC, 1999.
- [CUD 89] CUDNEY, H.H., INMAN, D.J. Determining Damping Mechanisms in a Composite Beam. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* Vol 4., No. 4, 138-143, 1989.
- [COW 66] COWPER, G.R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 33: 335-340, 1966.
- [GAL 87] GALLICCHIO, E. Soluções Dinâmicas, Desacoplamento e Aproximação em Equações Diferenciais Matriciais de Ordem Superior. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS/CPGM, Porto Alegre, 1987.
- [GAL 95] GALICCHIO, E. Vibration Analysis of a Bus Driver Model, *ICIAM 95*, Hamburgo, 1995.

- [GOL 89] GOLUB, G.H., VAN LOAN, C.F. *Matrix Computations*. John Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [IBR 76] IBRAHIM, S.R., MIKWLICIK, E.C., The Experimental Determination of Vibration Parameters for Time Responses, *Shock and Vibration Bulletin*, n^o 46, 1976.
- [INM 89] INMAN, D. *Vibration, with Control, Measurement, and Stability*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [INM 94] INMAN, D. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [JOH 65] JOHN, F. *Ordinary Differential Equations*. Notes of Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1965.
- [LAV 75] LAVOIE, J. L., The mth power of an $n \times m$ matrix and the Bell polynomials, *SIAM J. App. Math*, Vol. 29, (3), 1975.
- [LEU 86] LEURIDAN, J.M., BROWN, D.L. and ALLEMANG, R.J. Time Domain Parameter Identification Methods for Linear Modal Analysis, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1986
- [MEI 75] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. Mc Graw - Hill, Inc., 1975
- [NAS 85] NASHIF, A.D., JONES, D.I. *Vibration Damping*. Wiley, New York, 1985.
- [NEW 89] NEWLAND, D.E. *Mechanical Vibration Analysis and Computation*. Longman Scientific & Technical, London, 1989
- [NEW 93] NEWLAND, D.E. *Random Vibration, Spectral and Wavelet Analysis*. Longman Scientific & Technical, London, 1993

- [SES 87] SESTIERI, A., Dispensa di Corso di Meccanica delle Vibrazione,
Universita de Roma, 1987
- [SES 93] SESTIERI, A., IBRAHIM S., Analysis of Errors and Approximations in
the Use of Modal Coordinates, *Universita di Roma, "La Sapienza",*
Dipartamieto di Meccanica, 1993
- [VEL 71] VELETSOS, A.S., WEI, Y.T. Lateral and Rocking Vibration of
Footings. *J. Soil Mech. Found. Div.*, ASCE, 97, 1227-1248, 1971.