

Equações não lineares

Leonardo F. Guidi

DMPA – IM
UFRGS

Cálculo Numérico



Índice

- 1 Métodos de quebra
 - Método da bissecção
- 2 Métodos de ponto fixo
 - Método Newton-Raphson
- 3 Métodos de múltiplos passos
 - Método da secante

Equações não lineares

Vamos estudar métodos numéricos para resolver o seguinte problema. Dada uma função f contínua, real e de uma variável, queremos encontrar uma solução x^* que satisfaça a equação não linear:

$$f(x^*) = 0.$$

Equações não lineares

Vamos estudar métodos numéricos para resolver o seguinte problema. Dada uma função f contínua, real e de uma variável, queremos encontrar uma solução x^* que satisfaça a equação não linear:

$$f(x^*) = 0.$$

Em geral essa equação não pode ser resolvida exatamente, isto é, a solução x^* não pode ser descrita a partir de uma combinação finita de operações algébricas simples ($+$, $-$, $/$, \times , \exp , \log) e funções elementares (polinômios, razão entre polinômios, potências racionais, e as funções transcendentais: \exp , \log , trigonométricas, hiperbólicas).

Equações não lineares

Idealmente, poderíamos dividir o procedimento nas seguintes etapas:

- Inicialmente devemos encontrar uma região de interesse onde possam existir soluções da equação; em seguida, quando possível, isolar os intervalos que contém apenas 1 solução;
- Feito isso, determinamos pelo menos 1 aproximação inicial $x^{(0)}$ da solução (de acordo com o método utilizado, pode ser necessário utilizar mais de uma aproximação inicial) para cada intervalo;
- Finalmente, a partir das aproximações iniciais, o método numérico consiste na construção de uma sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ que converge para a solução, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)} = x^*$$

Equações não lineares

Idealmente, poderíamos dividir o procedimento nas seguintes etapas:

- Inicialmente devemos encontrar uma região de interesse onde possam existir soluções da equação; em seguida, quando possível, isolar os intervalos que contém apenas 1 solução;
- Feito isso, determinamos pelo menos 1 aproximação inicial $x^{(0)}$ da solução (de acordo com o método utilizado, pode ser necessário utilizar mais de uma aproximação inicial) para cada intervalo;
- Finalmente, a partir das aproximações iniciais, o método numérico consiste na construção de uma sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ que converge para a solução, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)} = x^*$$

Equações não lineares

Idealmente, poderíamos dividir o procedimento nas seguintes etapas:

- Inicialmente devemos encontrar uma região de interesse onde possam existir soluções da equação; em seguida, quando possível, isolar os intervalos que contém apenas 1 solução;
- Feito isso, determinamos pelo menos 1 aproximação inicial $x^{(0)}$ da solução (de acordo com o método utilizado, pode ser necessário utilizar mais de uma aproximação inicial) para cada intervalo;
- Finalmente, a partir das aproximações iniciais, o método numérico consiste na construção de uma sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ que converge para a solução, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)} = x^*$$

Equações não lineares

Idealmente, poderíamos dividir o procedimento nas seguintes etapas:

- Inicialmente devemos encontrar uma região de interesse onde possam existir soluções da equação; em seguida, quando possível, isolar os intervalos que contém apenas 1 solução;
- Feito isso, determinamos pelo menos 1 aproximação inicial $x^{(0)}$ da solução (de acordo com o método utilizado, pode ser necessário utilizar mais de uma aproximação inicial) para cada intervalo;
- Finalmente, a partir das aproximações iniciais, o método numérico consiste na construção de uma sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ que converge para a solução, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)} = x^*$$

Equações não lineares

Idealmente, poderíamos dividir o procedimento nas seguintes etapas:

- Inicialmente devemos encontrar uma região de interesse onde possam existir soluções da equação; em seguida, quando possível, isolar os intervalos que contém apenas 1 solução;
- Feito isso, determinamos pelo menos 1 aproximação inicial $x^{(0)}$ da solução (de acordo com o método utilizado, pode ser necessário utilizar mais de uma aproximação inicial) para cada intervalo;
- Finalmente, a partir das aproximações iniciais, o método numérico consiste na construção de uma sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ que converge para a solução, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)} = x^*$$

Portanto os métodos numéricos para encontrar a solução de equações não lineares são *métodos iterativos*.

Equações não lineares

Estudaremos os métodos separados em três classes principais:

- **Métodos de quebra:** o ponto de partida é encontrar um intervalo que contenha pelo menos 1 solução. De acordo com o teorema de Bolzano, basta determinar um intervalo em que a função f muda de sinal. Os métodos de quebra consistem na descrição de como subdividir o intervalo inicial em intervalos cada vez menores que ainda contenham a mesma solução. Nesse caso, a sequência $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ é formada pelos extremos dos intervalos.
- **Métodos de ponto fixo:** a sequência $\{x^{(i)}\}_{i=0}^n$ é construída a partir da sucessiva iteração $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$. A convergência do método é garantida pelo teorema do ponto fixo, daí o nome dos métodos.
- **Métodos de múltiplos passos:** uma generalização do método anterior onde a função ϕ depende de mais de uma aproximação anterior, i. e., $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x^{(n-v)})$ para algum $v \geq n$.

Equações não lineares

Estudaremos os métodos separados em três classes principais:

- **Métodos de quebra:** o ponto de partida é encontrar um intervalo que contenha pelo menos 1 solução. De acordo com o teorema de Bolzano, basta determinar um intervalo em que a função f muda de sinal. Os métodos de quebra consistem na descrição de como subdividir o intervalo inicial em intervalos cada vez menores que ainda contenham a mesma solução. Nesse caso, a sequência $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ é formada pelos extremos dos intervalos.
- **Métodos de ponto fixo:** a sequência $\{x^{(i)}\}_{i=0}^n$ é construída a partir da sucessiva iteração $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$. A convergência do método é garantida pelo teorema do ponto fixo, daí o nome dos métodos.
- **Métodos de múltiplos passos:** uma generalização do método anterior onde a função ϕ depende de mais de uma aproximação anterior, i. e., $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x^{(n-v)})$ para algum $v \geq n$.

Equações não lineares

Estudaremos os métodos separados em três classes principais:

- **Métodos de quebra:** o ponto de partida é encontrar um intervalo que contenha pelo menos 1 solução. De acordo com o teorema de Bolzano, basta determinar um intervalo em que a função f muda de sinal. Os métodos de quebra consistem na descrição de como subdividir o intervalo inicial em intervalos cada vez menores que ainda contenham a mesma solução. Nesse caso, a sequência $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ é formada pelos extremos dos intervalos.
- **Métodos de ponto fixo:** a sequência $\{x^{(i)}\}_{i=0}^n$ é construída a partir da sucessiva iteração $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$. A convergência do método é garantida pelo teorema do ponto fixo, daí o nome dos métodos.
- **Métodos de múltiplos passos:** uma generalização do método anterior onde a função ϕ depende de mais de uma aproximação anterior, i. e., $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x^{(n-v)})$ para algum $v \geq n$.

Equações não lineares

Estudaremos os métodos separados em três classes principais:

- **Métodos de quebra:** o ponto de partida é encontrar um intervalo que contenha pelo menos 1 solução. De acordo com o teorema de Bolzano, basta determinar um intervalo em que a função f muda de sinal. Os métodos de quebra consistem na descrição de como subdividir o intervalo inicial em intervalos cada vez menores que ainda contenham a mesma solução. Nesse caso, a sequência $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ é formada pelos extremos dos intervalos.
- **Métodos de ponto fixo:** a sequência $\{x^{(i)}\}_{i=0}^n$ é construída a partir da sucessiva iteração $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$. A convergência do método é garantida pelo teorema do ponto fixo, daí o nome dos métodos.
- **Métodos de múltiplos passos:** uma generalização do método anterior onde a função ϕ depende de mais de uma aproximação anterior, i. e., $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x^{(n-v)})$ para algum $v \geq n$.

Equações não lineares

Estudaremos os métodos separados em três classes principais:

- **Métodos de quebra:** o ponto de partida é encontrar um intervalo que contenha pelo menos 1 solução. De acordo com o teorema de Bolzano, basta determinar um intervalo em que a função f muda de sinal. Os métodos de quebra consistem na descrição de como subdividir o intervalo inicial em intervalos cada vez menores que ainda contenham a mesma solução. Nesse caso, a sequência $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ é formada pelos extremos dos intervalos.
- **Métodos de ponto fixo:** a sequência $\{x^{(i)}\}_{i=0}^n$ é construída a partir da sucessiva iteração $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$. A convergência do método é garantida pelo teorema do ponto fixo, daí o nome dos métodos.
- **Métodos de múltiplos passos:** uma generalização do método anterior onde a função ϕ depende de mais de uma aproximação anterior, i. e., $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x^{(n-\nu)})$ para algum $\nu \geq n$.

Limitações de acurácia

Quando realizamos os cálculos com uma máquina, o valor de uma função f é calculado a partir de operações em ponto flutuante. Vamos denominar \tilde{f} a função obtida através das operações em ponto flutuante.

A função \tilde{f} pode não possuir o mesmo comportamento de f , em particular, próxima à origem \tilde{f} pode não ser monótona mesmo que f o seja.

Limitações de acurácia

Quando realizamos os cálculos com uma máquina, o valor de uma função f é calculado a partir de operações em ponto flutuante. Vamos denominar \tilde{f} a função obtida através das operações em ponto flutuante.

A função \tilde{f} pode não possuir o mesmo comportamento de f , em particular, próxima à origem \tilde{f} pode não ser monótona mesmo que f o seja.

Assim, mesmo que para um dado $x^{(n)}$ o valor de $|\tilde{f}(x^{(n)})|$ seja pequeno, não é possível afirmar que $x^{(n)}$ está próximo de um zero x^* de f sem que saibamos o comportamento de sua derivada f' .

Limitações de acurácia

Quando realizamos os cálculos com uma máquina, o valor de uma função f é calculado a partir de operações em ponto flutuante. Vamos denominar \tilde{f} a função obtida através das operações em ponto flutuante.

A função \tilde{f} pode não possuir o mesmo comportamento de f , em particular, próxima à origem \tilde{f} pode não ser monótona mesmo que f o seja.

Assim, mesmo que para um dado $x^{(n)}$ o valor de $|\tilde{f}(x^{(n)})|$ seja pequeno, não é possível afirmar que $x^{(n)}$ está próximo de um zero x^* de f sem que saibamos o comportamento de sua derivada f' .

O seguinte teorema nos será útil na situação em que x^* for uma raiz simples, ou seja, quando $f'(x^*) \neq 0$.

Teorema

Seja f uma função contínua e diferenciável no intervalo $I = (x^{(n)} - \varepsilon, x^{(n)} + \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$. Se $|f'(x)| \geq L$ para todo $x \in I$ e $|f(x^{(n)})| \leq \varepsilon L$ então f possui exatamente um zero em I .

Limitações de acurácia

Vamos supor que em um intervalo I a função calculada via operações em ponto flutuante \tilde{f} relaciona-se à original pela expressão

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \delta(x), \quad \text{onde } |\delta(x)| \leq \delta, \quad x \in I.$$

Limitações de acurácia

Vamos supor que em um intervalo I a função calculada via operações em ponto flutuante \tilde{f} relaciona-se à original pela expressão

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \delta(x), \quad \text{onde } |\delta(x)| \leq \delta, \quad x \in I.$$

Então a diferença entra a aproximação x_n e o valor exato x^* para um dos zeros de f satisfaz a desigualdade

$$\left| x^{(n)} - x^* \right| \leq \varepsilon, \quad \text{onde } \varepsilon = \frac{|f(x^{(n)})|}{L} \leq \frac{|\tilde{f}(x^{(n)}) + \delta|}{L}.$$

Limitações de acurácia

Vamos supor que em um intervalo I a função calculada via operações em ponto flutuante \tilde{f} relaciona-se à original pela expressão

$$f(x) = \tilde{f}(x) + \delta(x), \quad \text{onde } |\delta(x)| \leq \delta, \quad x \in I.$$

Então a diferença entra a aproximação x_n e o valor exato x^* para um dos zeros de f satisfaz a desigualdade

$$\left| x^{(n)} - x^* \right| \leq \varepsilon, \quad \text{onde } \varepsilon = \frac{|f(x^{(n)})|}{L} \leq \frac{|\tilde{f}(x^{(n)}) + \delta|}{L}.$$

Se a função \tilde{f} for nula em $x^{(n)}$ (é o melhor que podemos esperar realizando as operações em uma máquina) teremos

$$\left| x^{(n)} - x^* \right| \leq \frac{\delta}{L} \approx \varepsilon_{x^*} = \frac{\delta}{|f'(x^*)|}$$

onde ε_{x^*} é denominado “limite de acurácia”.

Limitações de acurácia

A partir dessa expressão podemos verificar que se $|f'(x^*)|$ for pequeno, o problema será mal condicionado.

Limitações de acurácia

A partir dessa expressão podemos verificar que se $|f'(x^*)|$ for pequeno, o problema será mal condicionado.

Quando x^* não for uma raiz simples, o problema de condicionamento se manifesta de forma mais evidente.

Definição: multiplicidade de raízes

Seja f uma função p vezes continuamente diferenciável em alguma vizinhança de x^* , raiz da equação $f(x) = 0$. Dizemos que x^* possui multiplicidade p se

$$0 \neq \lim_{x \rightarrow x^*} \left| \frac{f(x)}{(x - x^*)^p} \right| < \infty.$$

Através da série de Taylor é possível verificar que o limite de acurácia na aproximação de um zero de multiplicidade k é dado por

$$\epsilon_{x^*} = \left(\frac{k! \delta}{|f^{(k)}(x^*)|} \right)^{1/k}.$$

Critério de parada

O critério de parada pode ser definido de várias formas. No caso dos métodos iterativos, o mais usual é a interrupção do algoritmo quando for satisfeita a desigualdade

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| \leq \varepsilon = 2 * \%eps * \left| x^{(n)} \right|.$$

Critério de parada

O critério de parada pode ser definido de várias formas. No caso dos métodos iterativos, o mais usual é a interrupção do algoritmo quando for satisfeita a desigualdade

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| \leq \varepsilon = 2 * \%eps * \left| x^{(n)} \right|.$$

Se houver informação sobre as quantidades δ e $f'(x^*)$, pode-se utilizar o limite de acurácia ε_{x^*} como critério de parada.

Critério de parada

O critério de parada pode ser definido de várias formas. No caso dos métodos iterativos, o mais usual é a interrupção do algoritmo quando for satisfeita a desigualdade

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| \leq \varepsilon = 2 * \%eps * \left| x^{(n)} \right|.$$

Se houver informação sobre as quantidades δ e $f'(x^*)$, pode-se utilizar o limite de acurácia ε_{x^*} como critério de parada.

No caso de métodos iterativos de rápida convergência é possível utilizar como critério de parada, a exigência de que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right| \geq \left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right|.$$

Métodos de quebra

Os métodos de quebra utilizam como primeira aproximação um intervalo que contenha pelo menos 1 solução da equação não linear. As iterações consistem em seguidas subdivisões dos intervalos de maneira que o novo intervalo sempre contenha a solução.

Métodos de quebra

Os métodos de quebra utilizam como primeira aproximação um intervalo que contenha pelo menos 1 solução da equação não linear. As iterações consistem em seguidas subdivisões dos intervalos de maneira que o novo intervalo sempre contenha a solução.

Teorema de Bolzano

Seja $I = [a, b] \in \mathbb{R}$ e uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então o conjunto imagem $f(I)$ é também um intervalo e $[f(a), f(b)] \subseteq f(I)$ ou $[f(b), f(a)] \subseteq f(I)$.

Métodos de quebra

Os métodos de quebra utilizam como primeira aproximação um intervalo que contenha pelo menos 1 solução da equação não linear. As iterações consistem em seguidas subdivisões dos intervalos de maneira que o novo intervalo sempre contenha a solução.

Teorema de Bolzano

Seja $I = [a, b] \in \mathbb{R}$ e uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então o conjunto imagem $f(I)$ é também um intervalo e $[f(a), f(b)] \subseteq f(I)$ ou $[f(b), f(a)] \subseteq f(I)$.

Portanto, se encontrarmos um intervalo $[a, b]$ tal que, por exemplo, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, então pelo teorema de Bolzano existe, um ponto $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$.

O que difere os métodos de quebra entre si é a maneira com que os intervalos são subdivididos.

Método da Bissecção

O passo inicial no método exige o conhecimento prévio de um intervalo $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ tal que $f(x^{(0)}) f(x^{(1)}) < 0$. De acordo com o teorema de Bolzano, há pelo menos uma solução nesse intervalo. A sequência de aproximações $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$ é construída de acordo com os seguintes passos:

Método da Bissecção

O passo inicial no método exige o conhecimento prévio de um intervalo $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ tal que $f(x^{(0)})f(x^{(1)}) < 0$. De acordo com o teorema de Bolzano, há pelo menos uma solução nesse intervalo. A sequência de aproximações $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$ é construída de acordo com os seguintes passos:

- As duas aproximações iniciais, $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$, são os extremos do intervalo inicial, a partir deles escolhemos o ponto intermediário $x_m = \frac{x^{(0)} + x^{(1)}}{2}$ como a nova aproximação.
- A partir de x_m , dividimos o intervalo ao meio, ou seja, o intervalo original é dividido em dois subintervalos de mesmo comprimento: $[x^{(0)}, x_m]$ e $[x_m, x^{(1)}]$.
- Caso $f(x_m) \neq 0$, entre $[x^{(0)}, x_m]$ e $[x_m, x^{(1)}]$, o intervalo que garantidamente possui pelo menos uma solução é aquele cujo produto de f nos extremos for menor que zero. Os novos extremos que satisfazem essa condição são renomeados $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$, ou seja,

$$x^{(2)} = \begin{cases} x^{(0)}, & \text{se } f(x^{(0)})f(x_m) < 0 \\ x_m, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad x^{(3)} = \begin{cases} x_m, & \text{se } f(x^{(0)})f(x_m) < 0 \\ x^{(1)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Método da Bissecção

O passo inicial no método exige o conhecimento prévio de um intervalo $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ tal que $f(x^{(0)})f(x^{(1)}) < 0$. De acordo com o teorema de Bolzano, há pelo menos uma solução nesse intervalo. A sequência de aproximações $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$ é construída de acordo com os seguintes passos:

- As duas aproximações iniciais, $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$, são os extremos do intervalo inicial, a partir deles escolhemos o ponto intermediário $x_m = \frac{x^{(0)} + x^{(1)}}{2}$ como a nova aproximação.
- A partir de x_m , dividimos o intervalo ao meio, ou seja, o intervalo original é dividido em dois subintervalos de mesmo comprimento: $[x^{(0)}, x_m]$ e $[x_m, x^{(1)}]$.
- Caso $f(x_m) \neq 0$, entre $[x^{(0)}, x_m]$ e $[x_m, x^{(1)}]$, o intervalo que garantidamente possui pelo menos uma solução é aquele cujo produto de f nos extremos for menor que zero. Os novos extremos que satisfazem essa condição são renomeados $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$, ou seja,

$$x^{(2)} = \begin{cases} x^{(0)}, & \text{se } f(x^{(0)})f(x_m) < 0 \\ x_m, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad x^{(3)} = \begin{cases} x_m, & \text{se } f(x^{(0)})f(x_m) < 0 \\ x^{(1)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Método da Bissecção

O passo inicial no método exige o conhecimento prévio de um intervalo $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ tal que $f(x^{(0)})f(x^{(1)}) < 0$. De acordo com o teorema de Bolzano, há pelo menos uma solução nesse intervalo. A sequência de aproximações $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$ é construída de acordo com os seguintes passos:

- As duas aproximações iniciais, $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$, são os extremos do intervalo inicial, a partir deles escolhemos o ponto intermediário $x_m = \frac{x^{(0)} + x^{(1)}}{2}$ como a nova aproximação.
- A partir de x_m , dividimos o intervalo ao meio, ou seja, o intervalo original é dividido em dois subintervalos de mesmo comprimento: $[x^{(0)}, x_m]$ e $[x_m, x^{(1)}]$.
- Caso $f(x_m) \neq 0$, entre $[x^{(0)}, x_m]$ e $[x_m, x^{(1)}]$, o intervalo que garantidamente possui pelo menos uma solução é aquele cujo produto de f nos extremos for menor que zero. Os novos extremos que satisfazem essa condição são renomeados $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$, ou seja,

$$x^{(2)} = \begin{cases} x^{(0)}, & \text{se } f(x^{(0)})f(x_m) < 0 \\ x_m, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad x^{(3)} = \begin{cases} x_m, & \text{se } f(x^{(0)})f(x_m) < 0 \\ x^{(1)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Método da Bissecção

O passo inicial no método exige o conhecimento prévio de um intervalo $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ tal que $f(x^{(0)})f(x^{(1)}) < 0$. De acordo com o teorema de Bolzano, há pelo menos uma solução nesse intervalo. A sequência de aproximações $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$ é construída de acordo com os seguintes passos:

- As duas aproximações iniciais, $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$, são os extremos do intervalo inicial, a partir deles escolhemos o ponto intermediário $x_m = \frac{x^{(0)} + x^{(1)}}{2}$ como a nova aproximação.
- A partir de x_m , dividimos o intervalo ao meio, ou seja, o intervalo original é dividido em dois subintervalos de mesmo comprimento: $[x^{(0)}, x_m]$ e $[x_m, x^{(1)}]$.
- Caso $f(x_m) \neq 0$, entre $[x^{(0)}, x_m]$ e $[x_m, x^{(1)}]$, o intervalo que garantidamente possui pelo menos uma solução é aquele cujo produto de f nos extremos for menor que zero. Os novos extremos que satisfazem essa condição são renomeados $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$, ou seja,

$$x^{(2)} = \begin{cases} x^{(0)}, & \text{se } f(x^{(0)})f(x_m) < 0 \\ x_m, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad x^{(3)} = \begin{cases} x_m, & \text{se } f(x^{(0)})f(x_m) < 0 \\ x^{(1)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Método da Bissecção

O subintervalo resultante possui metade do comprimento do intervalo original, $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ e seus extremos são indicados pelos pontos $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$. Esse novo subintervalo é submetido a nova divisão e o procedimento é repetido .

Dessa forma, a partir das aproximações iniciais $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ construiremos uma sequência de intervalos $\{[x^{(0)}, x^{(1)}], [x^{(2)}, x^{(3)}], [x^{(4)}, x^{(5)}], \dots, [x^{(2k)}, x^{(2k+1)}], \dots\}$ cujos comprimentos decrescem com uma razão $1/2$ e os pontos $x^{(2k)}$ e $x^{(2k+1)}$ são determinados a partir das regras (onde $k = 1, 2, \dots$)

$$x_m = \frac{x^{(2k-2)} + x^{(2k-1)}}{2},$$

$$x^{(2k)} = \begin{cases} x^{(2k-2)}, & \text{se } f(x^{(2k-2)}) f(x_m) < 0, \\ x_m, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$x^{(2k+1)} = \begin{cases} x_m, & \text{se } f(x^{(2k-2)}) f(x_m) < 0, \\ x^{(2k-1)}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Método da Bissecção

Observação

Se a aproximação inicial $[x^{(0)}, x^{(1)}]$ for tal que $f(x^{(0)}) f(x^{(1)}) > 0$ isto não quer dizer que não exista solução nesse intervalo, apenas o teorema não permite uma conclusão sobre a existência ou não de solução nesse intervalo. Nesse caso é necessário escolher outro intervalo ou então realizar uma divisão adicional.

Algoritmo

Devemos adotar um critério de parada no processo de subdivisão dos intervalos. É comum utilizar dois parâmetros: um de valor pequeno, tol , a partir do qual o processo é interrompido se a desigualdade $|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < tol |x^{(n)}|$ for satisfeita e um parâmetro inteiro, Nit , que representa o número máximo aceitável de iterações. O seguinte algoritmo descreve com maior detalhe todos os passos.

Algoritmo

Devemos adotar um critério de parada no processo de subdivisão dos intervalos. É comum utilizar dois parâmetros: um de valor pequeno, *tol*, a partir do qual o processo é interrompido se a desigualdade $|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < tol |x^{(n)}|$ for satisfeita e um parâmetro inteiro, *Nit*, que representa o número máximo aceitável de iterações. O seguinte algoritmo descreve com maior detalhe todos os passos.

- Entrada do programa: consiste nos extremos do intervalo inicial $[a, b]$, a função f , o parâmetro de acurácia *tol* e o número máximo aceitável de passos, *Nit*.
- Saída: podem ser mensagens de erro ou a solução x^* com acurácia dada pelo parâmetro *tol*.
- Variáveis internas: " x_0 ", " x_1 " e " x_m " que guardam os extremos do subintervalo em trabalho e o ponto intermediário; " f_0 ", " f_1 " e " f_m " que guardam os valores da função f nesses pontos ; a variável booliana "*segue*" que guarda a informação sobre a interrupção do laço e o contador "*cont*".

Algoritmo

- 1 entrada $[a, b, f, tol, Nit]$;
- 2 $x_0 \leftarrow a$; $x_1 \leftarrow b$; $f_0 \leftarrow f(x_0)$; $f_1 \leftarrow f(x_1)$; $segue \leftarrow sim$; $cont \leftarrow 0$;
- 3 se $f_0 \times f_1 > 0$, então:
 - 1 mensagem[“O intervalo inicial pode não conter solução”];
 - 2 $segue \leftarrow não$
- 4 enquanto $segue = sim$
 - 1 $x_m \leftarrow 0,5 \times (x_0 + x_1)$; $f_m \leftarrow f(x_m)$;
 - 2 se $f_m \times f_0 < 0$, então: $\{x_1 \leftarrow x_m; f_1 \leftarrow f_m\}$, senão: $\{x_0 \leftarrow x_m; f_0 \leftarrow f_m\}$;
 - 3 $cont \leftarrow cont + 1$;
 - 4 se $f_m = 0$ ou $|x_1 - x_0| \leq tol \times |x_m|$ ou $cont = Nit$, então: $segue \leftarrow não$;
- 5 se $cont = Nit$ e $|x_1 - x_0| > tol \times |x_m|$, então: mensagem[“A tolerância não foi satisfeita em Nit iterações.”];
- 6 se $cont = 0$ então: mensagem[“Não foi possível utilizar o método.”], senão: saída[$x_m, f_m, cont$];
- 7 termina o programa.

Algoritmo

- 1 entrada $[a, b, f, tol, Nit]$;
- 2 $x_0 \leftarrow a$; $x_1 \leftarrow b$; $f_0 \leftarrow f(x_0)$; $f_1 \leftarrow f(x_1)$; $segue \leftarrow sim$; $cont \leftarrow 0$;
- 3 se $f_0 \times f_1 > 0$, então:
 - 1 mensagem[“O intervalo inicial pode não conter solução”];
 - 2 $segue \leftarrow não$
- 4 enquanto $segue = sim$
 - 1 $x_m \leftarrow 0,5 \times (x_0 + x_1)$; $f_m \leftarrow f(x_m)$;
 - 2 se $f_m \times f_0 < 0$, então: $\{x_1 \leftarrow x_m; f_1 \leftarrow f_m\}$, senão: $\{x_0 \leftarrow x_m; f_0 \leftarrow f_m\}$;
 - 3 $cont \leftarrow cont + 1$;
 - 4 se $f_m = 0$ ou $|x_1 - x_0| \leq tol \times |x_m|$ ou $cont = Nit$, então: $segue \leftarrow não$;
- 5 se $cont = Nit$ e $|x_1 - x_0| > tol \times |x_m|$, então: mensagem[“A tolerância não foi satisfeita em Nit iterações.”];
- 6 se $cont = 0$ então: mensagem[“Não foi possível utilizar o método.”], senão: saída[$x_m, f_m, cont$];
- 7 termina o programa.

Algoritmo

- 1 entrada $[a, b, f, tol, Nit]$;
- 2 $x_0 \leftarrow a$; $x_1 \leftarrow b$; $f_0 \leftarrow f(x_0)$; $f_1 \leftarrow f(x_1)$; $segue \leftarrow sim$; $cont \leftarrow 0$;
- 3 se $f_0 \times f_1 > 0$, então:
 - 1 mensagem[“ 0 intervalo inicial pode não conter solução”];
 - 2 $segue \leftarrow não$
- 4 enquanto $segue = sim$
 - 1 $x_m \leftarrow 0,5 \times (x_0 + x_1)$; $f_m \leftarrow f(x_m)$;
 - 2 se $f_m \times f_0 < 0$, então: $\{x_1 \leftarrow x_m; f_1 \leftarrow f_m\}$, senão: $\{x_0 \leftarrow x_m; f_0 \leftarrow f_m\}$;
 - 3 $cont \leftarrow cont + 1$;
 - 4 se $f_m = 0$ ou $|x_1 - x_0| \leq tol \times |x_m|$ ou $cont = Nit$, então: $segue \leftarrow não$;
- 5 se $cont = Nit$ e $|x_1 - x_0| > tol \times |x_m|$, então: mensagem[“A tolerância não foi satisfeita em Nit iterações.”];
- 6 se $cont = 0$ então: mensagem[“Não foi possível utilizar o método.”], senão: saída[$x_m, f_m, cont$];
- 7 termina o programa.

Algoritmo

- 1 entrada $[a, b, f, tol, Nit]$;
- 2 $x_0 \leftarrow a$; $x_1 \leftarrow b$; $f_0 \leftarrow f(x_0)$; $f_1 \leftarrow f(x_1)$; $segue \leftarrow sim$; $cont \leftarrow 0$;
- 3 se $f_0 \times f_1 > 0$, então:
 - 1 mensagem[“ 0 intervalo inicial pode não conter solução”];
 - 2 $segue \leftarrow não$
- 4 enquanto $segue = sim$
 - 1 $x_m \leftarrow 0,5 \times (x_0 + x_1)$; $f_m \leftarrow f(x_m)$;
 - 2 se $f_m \times f_0 < 0$, então: $\{x_1 \leftarrow x_m; f_1 \leftarrow f_m\}$, senão: $\{x_0 \leftarrow x_m; f_0 \leftarrow f_m\}$;
 - 3 $cont \leftarrow cont + 1$;
 - 4 se $f_m = 0$ ou $|x_1 - x_0| \leq tol \times |x_m|$ ou $cont = Nit$, então: $segue \leftarrow não$;
- 5 se $cont = Nit$ e $|x_1 - x_0| > tol \times |x_m|$, então: mensagem[“A tolerância não foi satisfeita em Nit iterações.”];
- 6 se $cont = 0$ então: mensagem[“Não foi possível utilizar o método.”], senão: saída[$x_m, f_m, cont$];
- 7 termina o programa.

Algoritmo

- 1 entrada $[a, b, f, tol, Nit]$;
- 2 $x_0 \leftarrow a$; $x_1 \leftarrow b$; $f_0 \leftarrow f(x_0)$; $f_1 \leftarrow f(x_1)$; *segue* \leftarrow *sim*; *cont* \leftarrow 0;
- 3 se $f_0 \times f_1 > 0$, então:
 - 1 mensagem[“ 0 intervalo inicial pode não conter solução”];
 - 2 *segue* \leftarrow *não*
- 4 enquanto *segue* = *sim*
 - 1 $x_m \leftarrow 0,5 \times (x_0 + x_1)$; $f_m \leftarrow f(x_m)$;
 - 2 se $f_m \times f_0 < 0$, então: $\{x_1 \leftarrow x_m; f_1 \leftarrow f_m\}$, senão: $\{x_0 \leftarrow x_m; f_0 \leftarrow f_m\}$;
 - 3 *cont* \leftarrow *cont* + 1;
 - 4 se $f_m = 0$ ou $|x_1 - x_0| \leq tol \times |x_m|$ ou *cont* = *Nit*, então: *segue* \leftarrow *não*;
- 5 se *cont* = *Nit* e $|x_1 - x_0| > tol \times |x_m|$, então: mensagem[“A tolerância não foi satisfeita em *Nit* iterações.”];
- 6 se *cont* = 0 então: mensagem[“Não foi possível utilizar o método.”], senão: saída[$x_m, f_m, cont$];
- 7 termina o programa.

Algoritmo

- 1 entrada $[a, b, f, tol, Nit]$;
- 2 $x_0 \leftarrow a$; $x_1 \leftarrow b$; $f_0 \leftarrow f(x_0)$; $f_1 \leftarrow f(x_1)$; $segue \leftarrow sim$; $cont \leftarrow 0$;
- 3 se $f_0 \times f_1 > 0$, então:
 - 1 mensagem[“ 0 intervalo inicial pode não conter solução”];
 - 2 $segue \leftarrow não$
- 4 enquanto $segue = sim$
 - 1 $x_m \leftarrow 0,5 \times (x_0 + x_1)$; $f_m \leftarrow f(x_m)$;
 - 2 se $f_m \times f_0 < 0$, então: $\{x_1 \leftarrow x_m; f_1 \leftarrow f_m\}$, senão: $\{x_0 \leftarrow x_m; f_0 \leftarrow f_m\}$;
 - 3 $cont \leftarrow cont + 1$;
 - 4 se $f_m = 0$ ou $|x_1 - x_0| \leq tol \times |x_m|$ ou $cont = Nit$, então: $segue \leftarrow não$;
- 5 se $cont = Nit$ e $|x_1 - x_0| > tol \times |x_m|$, então: mensagem[“A tolerância não foi satisfeita em Nit iterações.”];
- 6 se $cont = 0$ então: mensagem[“Não foi possível utilizar o método.”], senão: saída[$x_m, f_m, cont$];
- 7 termina o programa.

Algoritmo

- 1 entrada $[a, b, f, tol, Nit]$;
- 2 $x_0 \leftarrow a$; $x_1 \leftarrow b$; $f_0 \leftarrow f(x_0)$; $f_1 \leftarrow f(x_1)$; $segue \leftarrow sim$; $cont \leftarrow 0$;
- 3 se $f_0 \times f_1 > 0$, então:
 - 1 mensagem[“ 0 intervalo inicial pode não conter solução”];
 - 2 $segue \leftarrow não$
- 4 enquanto $segue = sim$
 - 1 $x_m \leftarrow 0,5 \times (x_0 + x_1)$; $f_m \leftarrow f(x_m)$;
 - 2 se $f_m \times f_0 < 0$, então: $\{x_1 \leftarrow x_m; f_1 \leftarrow f_m\}$, senão: $\{x_0 \leftarrow x_m; f_0 \leftarrow f_m\}$;
 - 3 $cont \leftarrow cont + 1$;
 - 4 se $f_m = 0$ ou $|x_1 - x_0| \leq tol \times |x_m|$ ou $cont = Nit$, então: $segue \leftarrow não$;
- 5 se $cont = Nit$ e $|x_1 - x_0| > tol \times |x_m|$, então: mensagem[“A tolerância não foi satisfeita em Nit iterações.”];
- 6 se $cont = 0$ então: mensagem[“Não foi possível utilizar o método.”], senão: saída[$x_m, f_m, cont$];
- 7 termina o programa.

Exemplo

Como exemplo do método, vamos estudar a equação não linear para $f(x) = x - e^{-x}$.

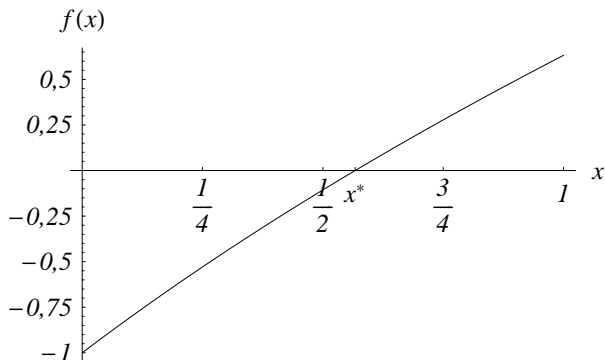


Figura: Gráfico da função $f(x) = x - e^{-x}$, no intervalo $x \in [0, 1]$.

Exemplo

A solução é dada em termos da função especial W de Lambert:

W de Lambert

Dado um real $y > -\frac{1}{e}$, a função $W(y)$ é definida como o número real W que satisfaz a equação $y = We^W$. Ou seja, W é a inversa da função xe^x .

Exemplo

A solução é dada em termos da função especial W de Lambert:

W de Lambert

Dado um real $y > -\frac{1}{e}$, a função $W(y)$ é definida como o número real W que satisfaz a equação $y = We^W$. Ou seja, W é a inversa da função xe^x .

Se x^* é solução da equação, então

$$x^* = e^{-x^*}. \text{ Por outro lado, } e^{-W(y)} = W(y)/y.$$

Comparando as duas expressões podemos concluir que $y = 1$ e portanto,

$$x^* = W(1) = 0,5671432904097839\dots$$

Exemplo

A tabela seguinte ilustra o comportamento dos extremos do intervalo para a equação $x - e^{-x} = 0$ com intervalo inicial $(0,0, 1,0)$:

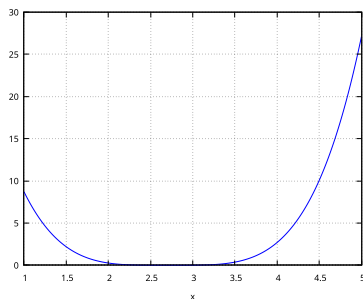
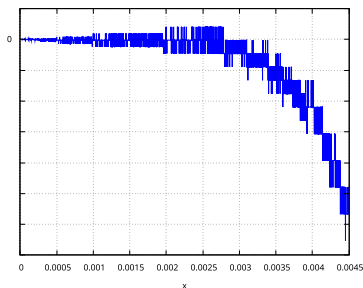
iteração n	$x^{(2n)}$	$x^{(2n+1)}$
1	0,5	1,0
2	0,5	0,75
3	0,5	0,625
4	0,5625	0,625
5	0,5626	0,59375
6	0,5625	0,578125

Tabela: Tabela das primeiras iterações para o método da bissecção.

Após 20 iterações chegamos ao intervalo $[0,567142\dots, 0,567143\dots]$. O valor $0,567143$ é satisfatório como solução com 6 dígitos exatos.

Limitações do método

Se na solução x^* , a primeira derivada não nula da função f for de ordem par então existe uma vizinhança de x^* na qual f possui o mesmo sinal. Veja os gráficos abaixo:



A função f na figura à esquerda possui uma região extensa de valores do argumento x em que $f(x)$ é quase nula e além disso, a aritmética de ponto flutuante não consegue capturar o comportamento da função na região de interesse. Já a função f na figura à direita é sempre positiva (a menos de sua raiz x^*).

Métodos de ponto fixo

Os métodos de ponto fixo caracterizam-se por reescrever a equação não linear

$$f(x^*) = 0$$

na forma

$$\phi(x^*) = x^*$$

e utilizar o teorema do ponto fixo – que veremos logo adiante – para garantir a convergência da sequência $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ para o ponto fixo x^* que é solução da equação original.

Métodos de ponto fixo

Os métodos de ponto fixo caracterizam-se por reescrever a equação não linear

$$f(x^*) = 0$$

na forma

$$\phi(x^*) = x^*$$

e utilizar o teorema do ponto fixo – que veremos logo adiante – para garantir a convergência da sequência $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ para o ponto fixo x^* que é solução da equação original.

Vamos considerar um intervalo $[a, b]$ que contém uma única solução $x^* \in [a, b]$ da equação. Nesse intervalo, definimos a função $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x) = x + \gamma(x)f(x),$$

onde $\gamma(x) \neq 0$ no intervalo $[a, b]$. Como γ não se anula em todo intervalo, a equação $\phi(x) = x$ possui x^* como única solução.

Métodos de ponto fixo

A solução x^* será então determinada através da convergência da sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^*$, onde $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$. A garantia da convergência é estabelecida pelo teorema do ponto fixo.

Métodos de ponto fixo

A solução x^* será então determinada através da convergência da sequência $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x^*$, onde $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$. A garantia da convergência é estabelecida pelo teorema do ponto fixo.

ponto fixo

Seja ϕ uma função contínua em um intervalo $I = [a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Se as seguintes condições forem satisfeitas:

- $\phi(I) \subseteq I$, obs: (a notação indica $\forall x \in I, \phi(x) \in I$)
- $\forall x \in I, |\phi'(x)| \leq L < 1$ obs:(ou seja, ϕ é uma contração)

Então dado qualquer $x_0 \in I$, existe um único ponto $x^* \in I$ tal que a sequência $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ converge para $x^* = \phi(x^*)$.

A partir da demonstração do teorema, podemos verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon^{(n+1)}|}{|\varepsilon^{(n)}|} = |\phi'(x^*)|, \text{ onde } \varepsilon^{(n)} := |x^{(n)} - x^*|.$$

Exemplos

Vamos considerar o exemplo que já estudamos anteriormente:

$$x - e^{-x} = 0$$

Nesse caso, a equação pode ser reescrita como

$$x = e^{-x} = \phi(x)$$

Levando em conta, a análise realizada para $\phi(x) = x + \gamma(x)f(x)$, a escolha de ϕ corresponde a $\gamma(x) \equiv -1$ (nesse caso, $\gamma(x) \neq 0$ para qualquer valor de x). Como $|\phi'(x)| = e^{-x}$, as hipóteses do teorema do ponto fixo são válidas no intervalo $I = (0, +\infty)$, onde $\phi(I) \subset I$ e $|\phi'(x)| < 1$.

Exemplos

Vamos então, escolher como aproximação inicial $x^{(0)} = 0,5$. A sequência é dada em seus primeiros termos por

iteração n	$x^{(n)}$
1	0,606531...
2	0,545239...
3	0,579703...
4	0,560065...
5	0,571172...
6	0,565863...

Tabela: Tabela das primeiras iterações para o método da iteração linear com $\phi(x) = e^{-x}$.

A solução com 6 dígitos exatos é alcançada após 22 iterações.

Exemplos

Uma outra possibilidade para a função ϕ seria a escolha $\phi(x) = -\ln x$ que corresponde a $\gamma(x) = -\frac{x + \ln x}{x - e^{-x}}$ que é sempre negativa no intervalo $(0, +\infty)$. No entanto, $|\phi'(x)| = \frac{1}{|x|}$ é maior do que a unidade no intervalo $(0, 1)$ que contém a solução e assim, o teorema do ponto fixo não dá garantias de convergência.

Método Newton-Raphson

Podemos notar que quanto menor for o limite superior $L < 1$ para o valor absoluto da derivada de ϕ na vizinhança da solução x^* mais rapidamente a sequência converge para a solução da equação não linear.

Método Newton-Raphson

Podemos notar que quanto menor for o limite superior $L < 1$ para o valor absoluto da derivada de ϕ na vizinhança da solução x^* mais rapidamente a sequência converge para a solução da equação não linear.

Portanto, a ideia é determinar uma função $\gamma(x)$ tal que ϕ e sua derivada sejam contínuas em algum domínio contínuo que contenha a solução e além disso, $\phi'(x^*) = 0$. Essas hipóteses garantem que, em uma vizinhança próxima de x^* , a função ϕ é tal que $|\phi'| \ll 1$.

Método Newton-Raphson

Tomando a derivada de ϕ , por definição temos:

$$\phi'(x) = 1 + \gamma'(x)f(x) + \gamma(x)f'(x)$$

e em $x = x^*$, solução da equação $f(x^*) = 0$, temos

$$\phi'(x^*) = 1 + \gamma(x^*)f'(x^*).$$

Portanto, a escolha

$$\gamma(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

implica $\phi'(x^*) = 0$, de maneira que na vizinhança de x^* , $|\phi'|$ assume pequenos valores. A partir da escolha para a função γ , a função ϕ é dada por

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Exemplo

Vamos novamente utilizar o exemplo $f(x) = x - e^{-x}$, nesse caso a iteração é dada pela função ϕ :

$$\phi(x) = x - \frac{x - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{(x+1)}{1 + e^x}.$$

Partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = 0,5$:

iteração n	$x^{(n)}$
1	0,566311...
2	0,567143...

Tabela: Tabela das primeiras iterações para o método Newton-Raphson com $\phi(x) = \frac{(x+1)}{1+e^x}$.

a sequência converge para a solução exata até a 6^a casa decimal em duas iterações. Se utilizarmos $x^{(0)} = 1,0$ como aproximação inicial obteríamos o mesmo resultado após três iterações.

Convergência

Vamos analisar com um pouco mais de detalhe a questão da convergência. Seja $x^{(n+1)}$ um ponto dado pela relação de recorrência que está próximo da solução x^* .

Convergência

Vamos analisar com um pouco mais de detalhe a questão da convergência. Seja $x^{(n+1)}$ um ponto dado pela relação de recorrência que está próximo da solução x^* . De acordo com a versão de Lagrange para o teorema de Taylor, existe um ξ no intervalo com extremos $x^{(n)}$ e x^* tal que

$$\begin{aligned}x^{(n+1)} &= \phi(x^{(n)}) \\&= x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \\&= x^{(n)} - \frac{f(x^*) + (x^{(n)} - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2} (x^{(n)} - x^*)^2 f''(\xi)}{f'(x^{(n)})} \\&= x^{(n)} - \frac{(x^{(n)} - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2} (x^{(n)} - x^*)^2 f''(\xi)}{f'(x^{(n)})}\end{aligned}$$

Convergência

Assim, no limite $n \rightarrow \infty$, temos $x^{(n)} \rightarrow x^*$ e $\xi \rightarrow x^*$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{(n+1)} - x^*|}{|x^{(n)} - x^*|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right|, \quad \text{se } f'(x^*) \neq 0.$$

Ou seja, se a raiz for simples (ou seja $f'(x^*) \neq 0$), a convergência é quadrática.

Método da secante

O método da secante é similar ao método da falsa posição, diferem entre si pelo fato de que no método da secante não há divisão e escolha de intervalos, a sequência de aproximações é calculada a partir das duas últimas aproximações e portanto, devemos iniciar com duas aproximações para a solução. Ao contrário do método da falsa posição, não há necessidade de que a solução esteja entre as duas aproximações iniciais.

A sequência é montada a partir da regra para iteração

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{(x^{(n)} - x^{(n-1)})}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} f(x^{(n)}).$$

Método da secante

De maneira semelhante à que ocorre nos métodos de ponto fixo, para que ocorra convergência, em geral, as duas primeiras aproximações devem estar em uma vizinhança suficientemente próxima da solução.

É possível demonstrar que se f for duas vezes continuamente diferenciável e $f'(x^*) \neq 0$, então existe um constante K tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{(n+1)} - x^*|}{|x^{(n)} - x^*|} = K,$$

onde $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Ou seja, apesar de ser mais lenta que no método Newton-Raphson, a convergência é mais rápida que a convergência linear de alguns métodos de ponto fixo.

Método da secante

iteração n	$x^{(n)}$
1	0,544221...
2	0,568826...
3	0,567150...
4	0,567143...

Tabela: Tabela das primeiras iterações para o método da secante para $f(x) = x - e^{-x}$, com aproximações iniciais $x^{(0)} = 0,9$ e $x^{(1)} = 1,0$.

a sequência converge para a solução exata até o sexto dígito em quatro iterações. Se utilizarmos $x^{(0)} = 0,5$ e $x^{(1)} = 1,0$ como primeiras aproximações obteríamos o mesmo resultado após três iterações.