

Sistemas de equações lineares

Leonardo F. Guidi

DMPA – IME
UFRGS

Cálculo Numérico



Índice

- 1 Sistema de Equações Lineares
- 2 Métodos Diretos
 - Eliminação Gaussiana
 - Eliminação Gaussiana com pivoteamento parcial
 - Condicionamento
- 3 Métodos Iterativos
 - Método de Jacobi
 - Método Gauss-Seidel

Sistema de Equações Lineares – n equações e n incógnitas

Nosso objetivo: métodos que construam uma aproximação $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ para a solução x do sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

onde os coeficientes a_{ij} e as constantes b_i são números reais.

Sistema de Equações Lineares – n equações e n incógnitas

Nosso objetivo: métodos que construam uma aproximação $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ para a solução x do sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

onde os coeficientes a_{ij} e as constantes b_i são números reais.

- Denominamos o conjunto de todas as possíveis soluções de um sistema linear de “conjunto solução”.
- Dados dois sistemas lineares, dizemos que os dois são “equivalentes” se possuírem o mesmo conjunto solução.

Exemplo: sistema 3×3

Sob um ponto de vista geométrico, cada equação de um sistema $n \times n$, representa um plano de dimensão $n - 1$ imerso no \mathbb{R}^n . Exemplo: sistema 3×3 .

Exemplo: sistema 3×3

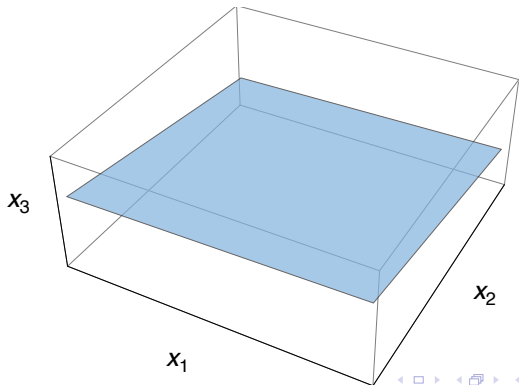
Sob um ponto de vista geométrico, cada equação de um sistema $n \times n$, representa um plano de dimensão $n - 1$ imerso no \mathbb{R}^n . Exemplo: sistema 3×3 .

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 10x_3 = 0 \\ 18x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 5 \end{cases}$$

Exemplo: sistema 3×3

Sob um ponto de vista geométrico, cada equação de um sistema $n \times n$, representa um plano de dimensão $n - 1$ imerso no \mathbb{R}^n . Exemplo: sistema 3×3 .

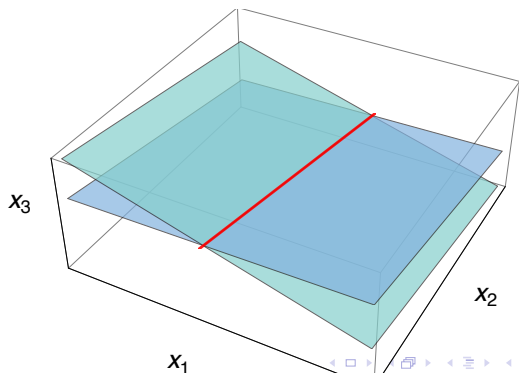
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 8x_2 - 10x_3 = 0 \end{array} \right.$$



Exemplo: sistema 3×3

Sob um ponto de vista geométrico, cada equação de um sistema $n \times n$, representa um plano de dimensão $n - 1$ imerso no \mathbb{R}^n . Exemplo: sistema 3×3 .

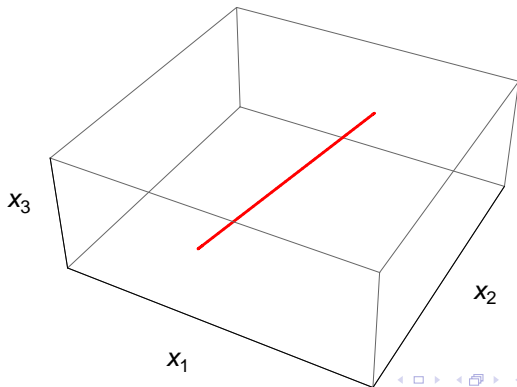
$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 10x_3 = 0 \\ 18x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$



Exemplo: sistema 3×3

Sob um ponto de vista geométrico, cada equação de um sistema $n \times n$, representa um plano de dimensão $n-1$ imerso no \mathbb{R}^n . Exemplo: sistema 3×3 .

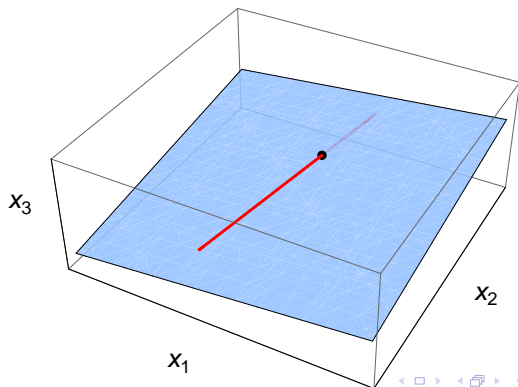
$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 10x_3 = 0 \\ 18x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$



Exemplo: sistema 3×3

Sob um ponto de vista geométrico, cada equação de um sistema $n \times n$, representa um plano de dimensão $n-1$ imerso no \mathbb{R}^n . Exemplo: sistema 3×3 .

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 10x_3 = 0 \\ 18x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 5 \end{cases}$$



Representação matricial

O sistema de equações é convenientemente representado em forma matricial através da equação

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Representação matricial

Um representação alternativa para o sistema consiste na *matriz completa do sistema* formada pela justaposição das matrizes A e \mathbf{b} da equação :

$$[A|\mathbf{b}] \doteq \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}.$$

Representação matricial

Um representação alternativa para o sistema consiste na *matriz completa do sistema* formada pela justaposição das matrizes A e \mathbf{b} da equação :

$$[A|\mathbf{b}] \doteq \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}.$$

Notação

Dadas duas matrizes completas C e D , dizemos que são equivalentes se representam sistemas de equações equivalentes. Notação:

$$C \sim D.$$

Representação matricial

Um representação alternativa para o sistema consiste na *matriz completa do sistema* formada pela justaposição das matrizes A e \mathbf{b} da equação :

$$[A|\mathbf{b}] \doteq \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}.$$

Operações Elementares

- A operação de troca de linhas na matriz completa não altera a solução.
- A substituição de uma linha pela combinação linear desta com uma outra linha distinta também não altera a solução.

Representação matricial

Um representação alternativa para o sistema consiste na *matriz completa do sistema* formada pela justaposição das matrizes A e \mathbf{b} da equação :

$$[A|\mathbf{b}] \doteq \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}.$$

Métodos Diretos

A partir das operação elementares é possível implementar uma série de métodos distintos para encontrar a solução do sistema. Os métodos que utilizam uma sequência finita de operações elementares para construir a solução são denominados *métodos diretos*.

Métodos Diretos

Um dos métodos diretos mais conhecidos é a eliminação de Gauss-Jordan. Esse método consiste em aplicar sucessivas operações elementares até que a matriz completa $[A|\mathbf{b}]$ assumam a forma

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^* \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2^* \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & x_3^* \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_n^* \end{pmatrix}.$$

Métodos Diretos

Um dos métodos diretos mais conhecidos é a eliminação de Gauss-Jordan. Esse método consiste em aplicar sucessivas operações elementares até que a matriz completa $[A|\mathbf{b}]$ assumam a forma

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^* \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2^* \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & x_3^* \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_n^* \end{pmatrix}.$$

Esse é o método comumente utilizado na solução de pequenos sistemas de n incógnitas e n equações na disciplina “álgebra linear”:

Métodos Diretos

Um dos métodos diretos mais conhecidos é a eliminação de Gauss-Jordan. Esse método consiste em aplicar sucessivas operações elementares até que a matriz completa $[A|\mathbf{b}]$ assuma a forma

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1^* \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2^* \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & x_3^* \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_n^* \end{pmatrix}.$$

- 1 Partimos da primeira coluna à esquerda em $[A|\mathbf{b}]$ e, sucessivamente, utilizamos operações elementares para anular as componentes abaixo da diagonal principal. Nesse ponto teremos uma matriz triangular superior.
- 2 Então retornamos a partir da última linha e da direita para a esquerda, realizamos operações elementares para anular as componentes acima da diagonal principal.

Eliminação Gaussiana

Uma alternativa ao método de Gauss-Jordan consiste em parar a sequência de operações elementares quando a matriz completa for da forma

$$[U|\mathbf{c}] \sim [A|\mathbf{b}],$$

onde U é triangular superior:

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \dots & u_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Eliminação Gaussiana

A matriz completa $[U|c]$ representa o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2 + \dots + u_{1,n}x_n = c_1 \\ \quad u_{2,2}x_2 + \dots + u_{2,n}x_n = c_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = c_{n-1} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad u_{n,n}x_n = c_n \end{array} \right.$$

Eliminação Gaussiana

A matriz completa $[U|c]$ representa o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2 + \dots + u_{1,n}x_n = c_1 \\ \quad u_{2,2}x_2 + \dots + u_{2,n}x_n = c_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = c_{n-1} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad u_{n,n}x_n = c_n \end{array} \right.$$

que pode ser resolvido através de substituições recursivas. A partir da última linha, temos

$$x_n = \frac{c_n}{u_{n,n}}, \quad x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}} (c_{n-1} - u_{n-1,n}x_n), \dots$$

Eliminação Gaussiana

A matriz completa $[U|c]$ representa o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2 + \dots + u_{1,n}x_n = c_1 \\ u_{2,2}x_2 + \dots + u_{2,n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = c_{n-1} \\ u_{n,n}x_n = c_n \end{array} \right.$$

E assim, sucessivamente, teremos para a i -ésima incógnita x_i :

$$x_i = \frac{1}{u_{i,i}} \left(c_i - \sum_{j=i+1}^n u_{i,j}x_j \right),$$

onde $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

- Se as operações elementares fossem realizadas com precisão infinita, a eliminação gaussiana produziria a solução exata.
- No entanto, devemos nos recordar que na prática as variáveis são representadas por pontos flutuantes e conseqüentemente, as operações aritméticas estão sujeitas a erros de arredondamento.
- Para ilustrar as limitações da eliminação gaussiana simples vamos considerar o seguinte exemplo.

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

Exemplo:

Seja um sistema de equações lineares representado pela matriz completa $[A|\mathbf{b}]$. Vamos supor que estamos na fase final de um processo de eliminação gaussiana e que as operações envolvem pontos flutuantes. Vamos supor também que, com exceção de uma particular componente, o resultado de todas as operações representam exatamente a matriz completa equivalente na forma (quase) escalonada:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n-2} & u_{1,n-1} & u_{1,n} & c_1 \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n-2} & u_{2,n-1} & u_{2,n} & c_2 \\ 0 & 0 & \cdots & u_{3,n-2} & u_{3,n-1} & u_{3,n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)_{n \times (n+1)} \approx [A|\mathbf{b}].$$

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

Exemplo:

Seja um sistema de equações lineares representado pela matriz completa $[A|\mathbf{b}]$. Vamos supor que estamos na fase final de um processo de eliminação gaussiana e que as operações envolvem pontos flutuantes. Vamos supor também que, com exceção de uma particular componente, o resultado de todas as operações representam exatamente a matriz completa equivalente na forma (quase) escalonada:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n-2} & u_{1,n-1} & u_{1,n} & c_1 \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n-2} & u_{2,n-1} & u_{2,n} & c_2 \\ 0 & 0 & \cdots & u_{3,n-2} & u_{3,n-1} & u_{3,n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)_{n \times (n+1)} \approx [A|\mathbf{b}].$$

Se as operações fossem realizadas sem erros de arredondamento, ao invés da matriz teríamos o escalonamento exato dado por

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n-2} & u_{1,n-1} & u_{1,n} & c_1 \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n-2} & u_{2,n-1} & u_{2,n} & c_2 \\ 0 & 0 & \cdots & u_{3,n-2} & u_{3,n-1} & u_{3,n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)_{n \times (n+1)} \sim [A|\mathbf{b}].$$

e as duas últimas componentes da solução exata são dadas por

$$x_n = 1 \quad \text{e} \quad x_{n-1} = 1.$$

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n-2} & u_{1,n-1} & u_{1,n} & c_1 \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n-2} & u_{2,n-1} & u_{2,n} & c_2 \\ 0 & 0 & \cdots & u_{3,n-2} & u_{3,n-1} & u_{3,n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)_{n \times (n+1)} \approx [A|\mathbf{b}].$$

e as duas últimas componentes da solução exata são dadas por

$$x_n = 1 \quad \text{e} \quad x_{n-1} = 1.$$

Por outro lado, o valor obtido para as duas últimas componentes da solução aproximada a partir da matriz completa são resultado das operações

$$\tilde{x}_n = \frac{3 - \frac{2}{\varepsilon}}{1 - \frac{2}{\varepsilon}} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{n-1} = \frac{1 - \tilde{x}_n}{\varepsilon}.$$

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

Vamos supor que as variáveis pertençam ao sistema de ponto flutuante $F(10,10,-90,90)$ e que o erro seja pequeno, por exemplo, $\varepsilon = 1 \times 10^{-11}$.

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

Vamos supor que as variáveis pertençam ao sistema de ponto flutuante $F(10,10,-90,90)$ e que o erro seja pequeno, por exemplo, $\varepsilon = 1 \times 10^{-11}$.

Nesse caso, $\frac{2}{\varepsilon} = 2 \times 10^{11}$ e assim

$$3 - \frac{2}{\varepsilon} = -1,999999999 \times 10^{11} \quad \text{ou} \quad -2 \times 10^{12}$$

e

$$1 - \frac{2}{\varepsilon} = -1,999999999 \times 10^{11} \quad \text{ou} \quad -2 \times 10^{12}$$

dependendo da escolha de arredondamento.

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

Vamos supor que as variáveis pertençam ao sistema de ponto flutuante $F(10, 10, -90, 90)$ e que o erro seja pequeno, por exemplo, $\varepsilon = 1 \times 10^{-11}$.

Nesse caso, $\frac{2}{\varepsilon} = 2 \times 10^{11}$ e assim

$$3 - \frac{2}{\varepsilon} = -1,999999999 \times 10^{11} \quad \text{ou} \quad -2 \times 10^{12}$$

e

$$1 - \frac{2}{\varepsilon} = -1,999999999 \times 10^{11} \quad \text{ou} \quad -2 \times 10^{12}$$

dependendo da escolha de arredondamento.

Em qualquer um dos casos, para um erro $\varepsilon = 1 \times 10^{-11}$ teremos como soluções aproximadas

$$\tilde{x}_n = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{n-1} = 0.$$

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

Uma análise mais atenta dos termos nos permite concluir que nesse exemplo não é possível encontrar a solução exata através da eliminação gaussiana simples.

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

Uma análise mais atenta dos termos nos permite concluir que nesse exemplo não é possível encontrar a solução exata através da eliminação gaussiana simples. Uma medida simples como a operação elementar de troca das duas últimas linhas antes da combinação linear das mesmas resultaria nas aproximações

$$\tilde{x}_n = \frac{1 - \frac{3}{2}\varepsilon}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_{n-1} = \frac{3 - \tilde{x}_n}{2}$$

que conduzem à solução exata quando o erro ε for suficientemente pequeno.

Eliminação Gaussiana com pivoteamento

Eliminação gaussiana com pivoteamento parcial – EGPP

- Consiste na troca de linhas em uma coluna pivô para que a posição de pivô seja ocupada pela maior componente em valor absoluto antes de realizarmos as operações que eliminam os termos abaixo da posição de pivô na mesma coluna.
- O método EGPP é numericamente estável: a solução aproximada corresponde à solução do problema original adicionado de um termo (matriz) perturbativa.
- Para uma grande classe de matrizes associadas à aplicações práticas, o crescimento dos coeficientes no termo perturbativo (o erro) em uma matriz $n \times n$ é proporcional a n^2 .
- No entanto, existem casos em que o crescimento desses termos pode ser da forma $n^2 2^{n-1}$.

Condicionamento

- Em vista dessas observações, naturalmente estaremos diante da questão de decidir entre duas ou mais aproximações aceitáveis qual delas é a mais adequada, ou “próxima” da solução exata.
- Porém nesse caso, o objeto que chamamos de solução não é um simplesmente um número real e sim um vetor do espaço vetorial n -dimensional \mathbb{R}^n . Como comparar esses objetos?
- Comparamos através de **normas**.

Definição: Norma para um espaço vetorial

Dado um espaço vetorial V , uma norma em V , simbolizada por $\|\cdot\|$, é uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ com as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C})

- 1 $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = \mathbf{0}$, o elemento nulo de V .
- 2 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
- 3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular)

Condicionamento

- Os sistemas de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ envolvem apenas vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e matrizes $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$ (conjunto de todas as matrizes de m linhas e n colunas com componentes reais).
- Os vetores do \mathbb{R}^n , assim como as matrizes $\mathbb{M}_{m \times n}$ são espaços vetoriais para quaisquer m e n naturais não nulos.
- Vamos então nos concentrar em três exemplos de normas para esses espaços.

Condicionamento

- Os sistemas de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ envolvem apenas vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e matrizes $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$ (conjunto de todas as matrizes de m linhas e n colunas com componentes reais).
- Os vetores do \mathbb{R}^n , assim como as matrizes $\mathbb{M}_{m \times n}$ são espaços vetoriais para quaisquer m e n naturais não nulos.
- Vamos então nos concentrar em três exemplos de normas para esses espaços.

Condicionamento

- Os sistemas de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ envolvem apenas vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e matrizes $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$ (conjunto de todas as matrizes de m linhas e n colunas com componentes reais).
- Os vetores do \mathbb{R}^n , assim como as matrizes $\mathbb{M}_{m \times n}$ são espaços vetoriais para quaisquer m e n naturais não nulos.
- Vamos então nos concentrar em três exemplos de normas para esses espaços.

Normas para o \mathbb{R}^n

Em geral, diferenciamos as normas entre si por algum símbolo no índice de $\|\cdot\|$. Em particular vamos considerar as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$: dado um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, de componentes x_i , definimos as normas

- $\|\mathbf{x}\|_1 \doteq \sum_{i=1}^n |x_i|$, (norma 1),
- $\|\mathbf{x}\|_2 \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, (norma 2 ou norma euclideana),
- $\|\mathbf{x}\|_\infty \doteq \max_i |x_i|$, (norma sup ou norma ∞).

Condicionamento

Da mesma forma vamos considerar as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ para matrizes $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$:

Normas para o $\mathbb{M}_{m \times n}$

Dada uma matriz $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$, de componentes $a_{i,j}$, definimos as normas

- 1 $\|A\|_1 \doteq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|$, (norma 1),
- 2 $\|A\|_2 \doteq \sqrt{\max \sigma(A^*A)}$, (norma 2),
- 3 $\|A\|_F \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2} \geq \|A\|_2$, (norma Frobenius),
- 4 $\|A\|_\infty \doteq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$, (norma sup ou norma ∞).

Obs.: $\sigma(M)$ é o conjunto de autovalores de uma matriz quadrada M .

Condicionamento

Da mesma forma vamos considerar as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ para matrizes $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$:

Normas para o $\mathbb{M}_{m \times n}$

Dada uma matriz $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$, de componentes $a_{i,j}$, definimos as normas

- 1 $\|A\|_1 \doteq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|$, (norma 1),
- 2 $\|A\|_2 \doteq \sqrt{\max \sigma(A^*A)}$, (norma 2),
- 3 $\|A\|_F \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2} \geq \|A\|_2$, (norma Frobenius),
- 4 $\|A\|_\infty \doteq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$, (norma sup ou norma ∞).

Obs.: $\sigma(M)$ é o conjunto de autovalores de uma matriz quadrada M .
Utilizamos os mesmos índices para identificar algumas das normas de vetores e matrizes pois, nesse caso, elas possuem uma importante relação entre si, elas são normas *compatíveis*:

Condicionamento

Dado qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$, verificamos que, de acordo com as definições de norma para vetores e matrizes dos exemplos anteriores,

$$\|A\mathbf{x}\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\alpha} \|\mathbf{x}\|_{\alpha}$$

nos casos em que $\alpha = 1, 2$ ou ∞ .

Condicionamento

Dado qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$, verificamos que, de acordo com as definições de norma para vetores e matrizes dos exemplos anteriores,

$$\|A\mathbf{x}\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\alpha} \|\mathbf{x}\|_{\alpha}$$

nos casos em que $\alpha = 1, 2$ ou ∞ .

Na realidade, essas normas para matrizes são construídas a partir da definição da norma vetorial compatível de acordo com a definição

$$\|A\|_{\alpha} \doteq \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{\alpha}}{\|\mathbf{x}\|_{\alpha}} = \max_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{y}\|_{\alpha}=1} \|A\mathbf{y}\|_{\alpha}.$$

Condicionamento

Dado qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$, verificamos que, de acordo com as definições de norma para vetores e matrizes dos exemplos anteriores,

$$\|\mathbf{Ax}\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\alpha} \|\mathbf{x}\|_{\alpha}$$

nos casos em que $\alpha = 1, 2$ ou ∞ .

Na realidade, essas normas para matrizes são construídas a partir da definição da norma vetorial compatível de acordo com a definição

$$\|A\|_{\alpha} \doteq \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_{\alpha}}{\|\mathbf{x}\|_{\alpha}} = \max_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{y}\|_{\alpha}=1} \|\mathbf{Ay}\|_{\alpha}.$$

Normas no Scilab

O Scilab dispõe da função `norm` que calcula as normas 1, 2 e ∞ de vetores e matrizes. `norm(A, 1)` e `norm(A, 2)` calculam respectivamente as norma 1 e 2, `norm(A, 'fro')` calcula a norma Frobenius e `norm(A, 'inf')` calcula a norma ∞ .

Condicionamento

A partir das definições de norma para vetores e matrizes, é possível comparar diferentes aproximações para a solução de um sistema de equações lineares. Se \mathbf{x}^0 e \mathbf{x}^1 são duas aproximações distintas do sistema não singular (possui apenas uma única solução) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então a multiplicação matricial de A pelos vetores que representam a aproximação resultam em duas aproximações para o vetor das constantes \mathbf{b} :

$$A\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}^0 \quad \text{e} \quad A\mathbf{x}^1 = \mathbf{b}^1.$$

Parece razoável supor que, através dos resíduos $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}^0\|$ e $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}^1\|$, os vetores \mathbf{b}^0 e \mathbf{b}^1 fornecem uma boa indicação sobre a exatidão das aproximações \mathbf{x}^0 e \mathbf{x}^1 . O exemplo a seguir mostra que isso não é necessariamente verdade.

Condicionamento

Exemplo: Seja o sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com representado pela seguinte matriz completa

$$A = \begin{pmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,913 & 0,659 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,217 \\ 0,254 \end{pmatrix}.$$

e duas outras matrizes constituídas por pequenas perturbações da matriz \mathbf{b} :

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \begin{pmatrix} -1,343 \times 10^{-3} \\ -1,572 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\tilde{\mathbf{b}}} = \mathbf{b} + \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz A não é singular, portanto o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui uma única solução, dada por $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Já as soluções dos sistemas $A\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ e $A\mathbf{x} = \tilde{\tilde{\mathbf{b}}}$ são dadas respectivamente por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{pmatrix}$$

Condicionamento

$$\begin{aligned}\| \mathbf{x}^* - \tilde{\tilde{\mathbf{x}}} \|_1 &= 1,572 > \| \mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}} \|_1 = 2 \times 10^{-3}, \\ \| \mathbf{x}^* - \tilde{\tilde{\mathbf{x}}} \|_2 &= 1,125\dots > \| \mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}} \|_2 = 1,414\dots \times 10^{-3}, \\ \| \mathbf{x}^* - \tilde{\tilde{\mathbf{x}}} \|_\infty &= 0,913 > \| \mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}} \|_\infty = 10^{-3}.\end{aligned}$$

Como o erro contido em $\tilde{\tilde{\mathbf{b}}}$ é maior do que o contido em $\tilde{\mathbf{b}}$, poderíamos ter sido levados a crer que a solução $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$ é mais próxima mais acurada, no entanto podemos constatar facilmente que $\| \mathbf{x}^* - \tilde{\tilde{\mathbf{x}}} \|_\alpha < \| \mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}} \|_\alpha$ qualquer que seja a norma.

Condicionamento

Dizemos que matrizes com propriedades semelhantes às do exemplo são **mal condicionadas**.

O condicionamento de uma matriz é medido através de sua norma e relaciona o erro relativo do vetor \mathbf{b} ao erro relativo da solução \mathbf{x} .

Sejam $\tilde{\mathbf{x}}$ uma aproximação da solução do sistema e $\tilde{\mathbf{b}} = A\tilde{\mathbf{x}}$, através da inversa de A relacionamos a solução e sua aproximação aos respectivos vetores constantes:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{x}} = A^{-1}\tilde{\mathbf{b}}.$$

A partir das duas última expressões, relacionamos o erro relativo cometido em na solução e o erro relativo no vetor de constantes:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_{\alpha}}{\|\mathbf{x}\|_{\alpha}} \leq \|A^{-1}\|_{\alpha} \|A\|_{\alpha} \frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|_{\alpha}}{\|\mathbf{b}\|_{\alpha}}.$$

Condicionamento

A partir da desigualdade definimos o condicionamento de uma matriz inversível (ou seja, não singular) A como o valor numérico $\kappa_\alpha(A)$

$$\kappa_\alpha(A) \doteq \|A^{-1}\|_\alpha \|A\|_\alpha.$$

Condicionamento

A partir da desigualdade definimos o condicionamento de uma matriz inversível (ou seja, não singular) A como o valor numérico $\kappa_\alpha(A)$

$$\kappa_\alpha(A) \doteq \|A^{-1}\|_\alpha \|A\|_\alpha.$$

Medida de condicionamento no Scilab

O Scilab dispõe da função `rcond` que fornece uma estimativa para o inverso de $\kappa_1(A)$.

Condicionamento

Não é difícil verificar que o condicionamento é um número maior ou igual a unidade: se $I = AA^{-1}$ é a matriz identidade, $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$, então para um vetor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\|\mathbf{x}\|_{\alpha} = \|AA^{-1}\mathbf{x}\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\alpha} \|A^{-1}\mathbf{x}\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\alpha} \|A^{-1}\|_{\alpha} \|\mathbf{x}\|_{\alpha}$$

o que implica $\|A^{-1}\|_{\alpha} \|A\|_{\alpha} \geq 1$.

Então se o erro relativo no valor da norma α de \mathbf{b} for de ordem 10^{-p_b} , podemos esperar um erro relativo na norma α da solução, limitado superiormente por 10^{-p_s} e relacionado à p_b através da desigualdade

$$p_s \geq p_b - \log_{10} \|A^{-1}\|_{\alpha} \|A\|_{\alpha}$$

que resulta do logaritmo em base 10 da desigualdade.

Métodos iterativos

- A solução dos sistemas lineares de n equações e n incógnitas através de métodos diretos envolve um número da ordem de n^3 operações em ponto flutuante e, como estudamos, dependendo da natureza das equações, os erros de arredondamento nessas operações podem ser grandes.
- Os métodos iterativos consistem em regras para a construção de sequências de aproximações $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}, \dots$ a partir de uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$. A construção deve garantir a convergência dessa sequência para a solução do sistema.

Métodos iterativos

O ponto de partida na consiste em decompor a matriz não singular A no sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

sob a forma

$$A = D - U - L,$$

onde D é diagonal (e não singular), U e L são respectivamente matrizes triangulares superior e inferior sem a diagonal principal.

Dada uma tal escolha, o sistema assume a forma

$$D\mathbf{x} - (U + L)\mathbf{x} = \mathbf{b} \longrightarrow D\mathbf{x} = \mathbf{b} + (U + L)\mathbf{x}.$$

Métodos iterativos

O ponto de partida na consiste em decompor a matriz não singular A no sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

sob a forma

$$A = D - U - L,$$

onde D é diagonal (e não singular), U e L são respectivamente matrizes triangulares superior e inferior sem a diagonal principal.

Dada uma tal escolha, o sistema assume a forma

$$D\mathbf{x} - (U + L)\mathbf{x} = \mathbf{b} \longrightarrow D\mathbf{x} = \mathbf{b} + (U + L)\mathbf{x}.$$

A partir de uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ vamos construir a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ como solução da seguinte modificação do sistema :

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} + (U + L)\mathbf{x}^{(k)},$$

para $k = 0, 1, \dots$

Métodos iterativos

Vamos denominar $\varepsilon^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$, como o erro da k -ésima aproximação com relação à solução exata. Então, a partir de, temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{(k)} \\ &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{(k)} \\ &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}\mathbf{x} - (\mathbf{U} + \mathbf{L})\mathbf{x}) + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{(k)} \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{L})\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right)\end{aligned}$$

e a partir dessa última igualdade temos

Métodos iterativos

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{L}) \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)} \right) \quad \implies \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)},$$

onde $\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{L})$.

Uma condição necessária e suficiente para que $\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ para qualquer $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ é que \mathbf{M} seja tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}^k = \mathbf{0} \in \mathbb{M}_{n \times n}$. Assim, dada uma aproximação inicial com erro $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$, após k iterações, o erro da $(k+1)$ -ésima aproximação será

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)} = \mathbf{M}\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k-2)} = \dots = \mathbf{M}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}.$$

Matrizes que satisfazem esse limite são denominadas *matrizes convergentes*. Portanto, quando decompos a matriz não singular \mathbf{A} na forma $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{U} - \mathbf{L}$, devemos realizar uma escolha que satisfaça os seguintes critérios:

- 1 A matriz \mathbf{D} deve ser não singular.
- 2 A matriz $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{U} + \mathbf{L})$ deve ser convergente.

Métodos iterativos

O seguinte teorema permite caracterizar uma matriz como convergente ou não, a partir dos seus autovalores.

Teorema: matrizes convergentes

Seja $M \in \mathbb{M}_{n \times n}$ uma matriz quadrada. M é convergente, ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = \mathbf{0} \in \mathbb{M}_{n \times n}$, se e somente se o valor absoluto de todos os seus autovalores for estritamente menor do que a unidade.

O seguinte corolário é muito útil também:

Corolário: matrizes convergentes – condição suficiente

Uma matriz quadrada M é convergente se para uma norma matricial qualquer, $\|M\| < 1$.

Métodos iterativos

De acordo com o corolário, se para qualquer uma dessas normas, a norma de $D^{-1}(U+L)$ for estritamente menor do que a unidade, então o método será convergente, caso contrário nada podemos afirmar (a não ser que conheçamos os autovalores da matriz).

Através da adoção da norma $\|\cdot\|_\infty$ no corolário anterior é possível estabelecer um critério simples para a convergência.

Método de Jacobi

Dado o sistema de equações lineares

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

onde A é uma matriz quadrada, $n \times n$, não singular e com elementos $(A)_{i,j} = a_{i,j}$, o método de Jacobi consiste na iteração

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{b} + (\mathbf{U} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{(k)} \right), \quad \mathbf{k} = 0, 1, \dots,$$

onde $\mathbf{x}^{(0)}$ é uma aproximação inicial e \mathbf{B} é a matriz diagonal formada pelos elementos da diagonal de A , portanto $(\mathbf{D})_{i,j} = \delta_{i,j}a_{i,j}$ e $(\mathbf{U} + \mathbf{L}) = \mathbf{D} - \mathbf{A}$. Em termos das componentes das aproximações da solução, o método assume a forma da iteração

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ a cada } k = 0, 1, \dots$$

Método de Jacobi

De acordo com o corolário sobre condição suficiente para convergência, o método de Jacobi será convergente se $\|D^{-1}(U+L)\|_{\infty} < 1$. Os elementos da matriz dada pelo produto $D^{-1}(U+L)$ são $(D^{-1}(U+L))_{i,j} = (\delta_{i,j} - 1) \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}$. Então podemos concluir através da norma matricial $\|\cdot\|_{\infty}$ que se

$$\|D^{-1}(U+L)\|_{\infty} < 1 \implies \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right| < 1$$

o método converge. A segunda desigualdade equivale à condição de *dominância diagonal estrita* da matriz A :

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{i,j}|, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Uma matriz que satisfaz essa propriedade é denominada *diagonal dominante estrita*.

Método de Jacobi

Além das matrizes diagonais dominantes estritas, uma outra classe de matrizes também garante a convergência das sequências obtidas via método de Jacobi. São as matrizes diagonais dominantes irredutíveis:

Definição: matriz diagonal dominante irredutível

Seja $M \in \mathbb{M}_{n \times n}$ uma matriz quadrada irredutível. M é denominada "diagonal dominante irredutível" se for diagonal dominante, ou seja, $|(M)_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(M)_{i,j}|$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, e além disso $|(M)_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |(M)_{i,j}|$ para algum $i = 1, 2, \dots, n$.

Método Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel consiste em uma pequena modificação do método de Jacobi.

De acordo com o método de Jacobi, para encontrar a aproximação $\mathbf{x}^{(k+1)}$, devemos conhecer todos as componentes da aproximação anterior $\mathbf{x}^{(k)}$.

Método Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel consiste em uma pequena modificação do método de Jacobi.

De acordo com o método de Jacobi, para encontrar a aproximação $\mathbf{x}^{(k+1)}$, devemos conhecer todos as componentes da aproximação anterior $\mathbf{x}^{(k)}$.

No método de Gauss-Seidel, levamos em conta que durante a iteração, parte das componentes da próxima aproximação já são conhecidas e são também incorporadas no cálculo das demais:

Método Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel consiste em uma pequena modificação do método de Jacobi.

De acordo com o método de Jacobi, para encontrar a aproximação $\mathbf{x}^{(k+1)}$, devemos conhecer todos as componentes da aproximação anterior $\mathbf{x}^{(k)}$.

No método de Gauss-Seidel, levamos em conta que durante a iteração, parte das componentes da próxima aproximação já são conhecidas e são também incorporadas no cálculo das demais:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{1,1}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1,j} x_j^{(k)} \right),$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right), \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{n,n}} \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j} x_j^{(k+1)} \right).$$

Método Gauss-Seidel

Pela estrutura da iteração, podemos notar que, ao contrário do que ocorre no método de Jacobi, não há necessidade de armazenar os dados de todas as componentes da k -ésima aproximação para obter a seguinte.

Método Gauss-Seidel

Pela estrutura da iteração, podemos notar que, ao contrário do que ocorre no método de Jacobi, não há necessidade de armazenar os dados de todas as componentes da k -ésima aproximação para obter a seguinte.

Assim como no método de Jacobi, a sequência converge para a solução do sistema se A for diagonal dominante estrita ou irredutível. Se A for simétrica e positiva definida, a convergência também é garantida.