Representação de números em máquinas

Leonardo F. Guidi

DMPA – IM
UFRGS

Cálculo Numérico

Índice

1. Erros
   - Conceitos iniciais
   - Propagação de erros
2. Instabilidade Numérica
   - Algoritmos instáveis
   - Cancelamento catastrófico
   - Condicionamento

Erros

O principal propósito da computação científica: a construção de métodos que permitam obter aproximações numéricas para um dado objeto cujo valor exato seja impossível ou muito difícil de ser obtido.
Os métodos devem produzir as aproximações do modo mais eficiente e acurado possível.
É fundamental controlar as fontes de erro.

Classificação dos erros (de acordo com a sua origem):

- erros nas medições (incertezas).
- erros de arredondamento.
- erros de truncamento.

Notação "≈"

Notação:

- Utilizamos a seguinte notação para expressar os dígitos conhecidos de um número, por exemplo:

$\pi = 3{,}14159\ldots$

- Com $x \ll y$ ($x \gg y$) queremos dizer que x é muito menor (muito maior) do que y. O termo "muito menor" (ou "muito maior") depende do contexto.
- Com $x \approx y$ queremos dizer que x é aproximadamente igual a y, ou dito de outra forma, $|x-y| \ll \varepsilon$, onde ε depende do contexto. Por exemplo:

$\pi \approx 3{,}142$.

- Com $x \lessapprox y$ ($x \gtrapprox y$) queremos dizer que x é menor (maior) ou aproximadamente igual a y e possui o mesmo significado da expressão "$x \leq y$ e $x \approx y$" ("$x \geq y$ e $x \approx y$").

Erro absoluto e erro relativo

Definição (erro absoluto e erro relativo):
Seja $\bar{x}$ uma variável que guarda ou representa o valor de uma quantidade cujo valor exato é x. O erro absoluto na representação $\bar{x}$ é definido por $|x-\bar{x}|$. O erro relativo é definido como $\dfrac{|x-\bar{x}|}{|x|}$.

Exemplos:

- Sejam $y=\pi$ e $\bar{y}=3{,}1416$. Então

$$\text{Erro relativo: } \frac{|y-\bar{y}|}{|y|} = 2{,}3384\ldots\times 10^{-6} \text{ ou } 0{,}00023384\ldots\%.$$

- Sejam $z=\sqrt{5}$ e $\bar{z}=\dfrac{13+4\pi}{24-4\pi}$. Então

$$\text{Erro absoluto: } |z-\bar{z}| = 1{,}680545\ldots\times 10^{-7}.$$

(Fonte: http://xkcd.com/1047/)

Erros nas medições

- É importante observar que erro absoluto e erro relativo são idealizações, pois a sua correta expressão depende do conhecimento de um valor exato (em muitas situações é o que se está buscando determinar).
- Mais próximo de uma situação real, o valor x não é conhecido exatamente. O seu valor é estimado através de uma sequência de N medidas $x_1, x_2, \ldots, x_N$.
- A diferença $x_i - x$ é o erro cometido na i-ésima medição.

Os erros $x_i - x$ decompõem-se em

- aleatórios: são distribuídos aleatóriamente em torno de zero.
- sistemáticos: trata-se de um viés, que pode ser eliminado através de uma correção.

Incerteza

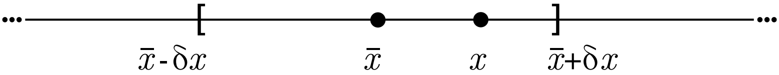
A partir da sequência de medições, o valor de uma grandeza x é estimado como

$$\bar{x} \pm \delta x,$$

onde o termo positivo δx é denominado "incerteza na medida $\bar{x}$".

O significado da expressão acima é de que o valor exato x pertence ao intervalo $[\bar{x} - \delta x, \bar{x} + \delta x]$ com alguma probabilidade não nula.

Ou seja, com probabilidade não nula $|x - \bar{x}| < \delta x$.



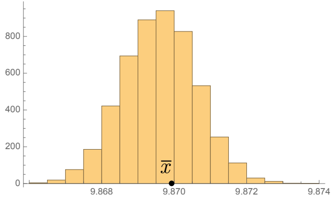
Incerteza

As incertezas são classificadas em dois tipos:

- Incertezas do tipo A. Aquelas avaliadas através da análise estatística de sequências de observações.
- Incertezas do tipo B. Aquelas avaliadas por outros meios.

Considere a seguinte situação. Uma sequência de $n = 5000$ medições do valor de uma grandeza x foi realizada com o objetivo de estimar o seu valor. Cuidados foram tomados para evitar a presença de erros sistemáticos.

medição	valor
1	9,869041
2	9,867953
3	9,869870
⋮	⋮
5000	9,868942



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

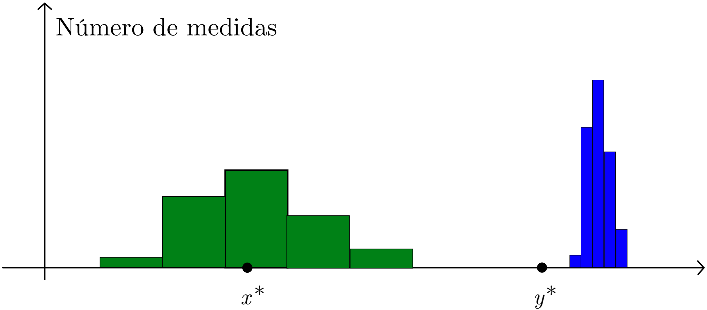
$$\delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}},$$

$$\bar{x} = 9{,}869600,$$

$$\delta x = 0{,}000014.$$

Incerteza

Os conceitos de **precisão** e **acurácia** são ilustrados pelos histogramas abaixo. O histograma à esquerda é o resultado de sucessivas medições de um valor real x^* e o histograma da direita é o resultado de sucessivas medições de um outro valor real y^*. A partir dos resultados, dizemos que as medições de x^*são mais acuradas porém menos precisas do que as medições de $y*$. Por sua vez, as medições de y^*são mais precisas porém menos acuradas do que as medições de x^*.



Incerteza

- Na análise numérica, precisão indica a quantidade de algarismos utilizados nas medições ou representação de uma dada variável. Já a exatidão, indica o quão próximo do valor exato de uma dada variável estão os valores médios ou as suas representações.
- Dizemos que os dados ou medições são acurados quando as exigências de precisão e exatidão satisfeitas simultaneamente.
- No caso dos pontos flutuantes, a precisão relaciona-se ao número denominado "ε de máquina": é o menor número que somado a 1 retorna um ponto flutuante diferente de 1. Esse valor constitui uma cota inferior da exatidão com a qual os registros de ponto flutuante representam os números. No Scilab é representado por %eps.

Propagação de erros

Considere uma variável unidimensional x cujo valor estimado e incerteza são conhecidos: $\bar{x} \pm \delta x$. Se há uma função f definida sobre um intervalo que contém x, como estimamos a incerteza $\delta f(\bar{x})$ associada ao valor que f assume em $\bar{x}$?

Vamos assumir que $\bar{x}$ é uma aproximação para x, sem perda de generalidade, vamos supor que $x > \bar{x}$.
Se quisermos encontrar o valor da função f calculada em x mas só dispormos de $\bar{x}$ devemos aproximar $f(x)$ por $f(\bar{x})$.

Para f diferenciável, o teorema do valor médio garante que existe um $\varepsilon \in (\bar{x}, x)$:

$$f(x) - f(\bar{x}) = f'(\varepsilon)(x - \bar{x}).$$

Mas e ε?

Propagação de erros

Supondo que f' é limitada no intervalo de valores entre x e $\bar{x}$, então podemos limitar em valor absoluto :

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq M\,|x - \bar{x}|,$$

onde $M = sup_{y\in(x,\bar{x})}\,|f'(y)|$.
Se o erro em valor absoluto for pequeno (o suficiente para que f' não varie apreciavelmente) então é razoável estimar

$$|f(x) - f(\bar{x})| \approx \left|f'(\bar{x})\right|\,|x - \bar{x}|\,.$$

O que induz o cálculo da incerteza no valor de $\delta f(\bar{x})$ a partir da incerteza em x:

$$\delta f(\bar{x}) = \left|f'(\bar{x})\right|\delta x.$$

Propagação de erros

Caso em que f depende de mais de uma variável, então há duas possibilidades principais:

- Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Se as variáveis x_i são correlacionadas e se f for diferenciável em uma vizinhança de x que contenha $\bar{x}$, então para $\bar{x}$ suficientemente próximo de x:

$$\delta f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \right| \delta x_i.$$

- Em algumas situações a estimativa anterior pode ser muito pessimista. Se as variáveis x_i são descorrelacionadas (quando os erros nas medidas experimentais são livres de erros sistemáticos), então a propagação de erro para f é dada por

$$\delta f(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \right|^2 \delta x_i^2}.$$

Propagação de erros

Caso em que f depende de mais de uma variável, então há duas possibilidades principais:

- Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Se as variáveis x_i são correlacionadas e se f for diferenciável em uma vizinhança de x que contenha $\bar{x}$, então para $\bar{x}$ suficientemente próximo de x:

$$\delta f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \right| \delta x_i.$$

- Em algumas situações a estimativa anterior pode ser muito pessimista. Se as variáveis x_i são descorrelacionadas (quando os erros nas medidas experimentais são livres de erros sistemáticos), então a propagação de erro para f é dada por

$$\delta f(\bar{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \right|^2 \delta x_i^2}.$$

Instabilidade numérica

Alguns problemas matemáticos e algoritmos numéricos possuem a propriedade de ampliar drasticamente os erros presentes nos dados de entrada e assim invalidar a saída ou resposta.

No contexto do cálculo numérico, esse fenômeno é denominado *instabilidade numérica*.

Instabilidade numérica

Alguns problemas matemáticos e algoritmos numéricos possuem a propriedade de ampliar drasticamente os erros presentes nos dados de entrada e assim invalidar a saída ou resposta.
No contexto do cálculo numérico, esse fenômeno é denominado *instabilidade numérica*.

A instabilidade se manifesta devido à natureza do algoritmo ou do próprio problema (nesse caso, dizemos que o problema é mal-condicionado).

Instabilidade numérica

Alguns problemas matemáticos e algoritmos numéricos possuem a propriedade de ampliar drasticamente os erros presentes nos dados de entrada e assim invalidar a saída ou resposta.
No contexto do cálculo numérico, esse fenômeno é denominado *instabilidade numérica*.

A instabilidade se manifesta devido à natureza do algoritmo ou do próprio problema (nesse caso, dizemos que o problema é mal-condicionado).

Vamos analisar a instabilidade numérica se manifestando em um algoritmo:

Instabilidade numérica

Alguns problemas matemáticos e algoritmos numéricos possuem a propriedade de ampliar drasticamente os erros presentes nos dados de entrada e assim invalidar a saída ou resposta.
No contexto do cálculo numérico, esse fenômeno é denominado *instabilidade numérica*.

A instabilidade se manifesta devido à natureza do algoritmo ou do próprio problema (nesse caso, dizemos que o problema é mal-condicionado).

Vamos analisar a instabilidade numérica se manifestando em um algoritmo:
Seja a integral I_n definida para qualquer $n = 0, 1, \ldots$

$$I_n \doteq \int_0^1 x^n e^{x-1} dx.$$

Instabilidade numérica

Alguns problemas matemáticos e algoritmos numéricos possuem a propriedade de ampliar drasticamente os erros presentes nos dados de entrada e assim invalidar a saída ou resposta.
No contexto do cálculo numérico, esse fenômeno é denominado *instabilidade numérica*.

A instabilidade se manifesta devido à natureza do algoritmo ou do próprio problema (nesse caso, dizemos que o problema é mal-condicionado).

Vamos analisar a instabilidade numérica se manifestando em um algoritmo:
Seja a integral I_n definida para qualquer $n = 0, 1, \ldots$

$$I_n \doteq \int_0^1 x^n e^{x-1} dx.$$

Essa integral é sempre positiva pois seu integrando é maior ou igual a zero e como $e^{x-1} \leq 1$ no intervalo de integração, temos que

$$0 < I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Instabilidade numérica

A integral pode ser resolvida utilizando-se sucessivamente a integração por partes. A partir dela, podemos verificar que I_n satisfaz uma "relação de recorrência".

Instabilidade numérica

A integral pode ser resolvida utilizando-se sucessivamente a integração por partes. A partir dela, podemos verificar que I_n satisfaz uma "relação de recorrência". Se $n \geq 1$, então

$$I_n = x^n e^{x-1}\Big|_{x=0}^{x=1} - n\int_0^1 x^{n-1}e^{x-1}dx$$

$$I_n = 1 - nI_{n-1}$$

para $n = 1, 2, \ldots$

Veremos que um algoritmo baseado na utilização direta da relação de recorrência para I_n é numericamente instável.

Cancelamento catastrófico

É um efeito presente nas operações em ponto flutuante, caracterizado pelo aumento significativo do erro relativo no resultado da operação. O cancelamento catastrófico pode ser verificado principalmente na operação de subtração de dois pontos flutuantes muito próximos.

Cancelamento catastrófico

É um efeito presente nas operações em ponto flutuante, caracterizado pelo aumento significativo do erro relativo no resultado da operação. O cancelamento catastrófico pode ser verificado principalmente na operação de subtração de dois pontos flutuantes muito próximos.

Vamos considerar a operação em ponto flutuante associada à subtração dos números racionais 0,9876543210423456789 e 0,9876543209.

Cancelamento catastrófico

É um efeito presente nas operações em ponto flutuante, caracterizado pelo aumento significativo do erro relativo no resultado da operação. O cancelamento catastrófico pode ser verificado principalmente na operação de subtração de dois pontos flutuantes muito próximos.

Vamos considerar a operação em ponto flutuante associada à subtração dos números racionais 0,9876543210423456789 e 0,9876543209.

Se os registros forem de 10 dígitos, a representação dos dois números será respectivamente

$$9{,}876543210 \times 10^{-1} \qquad \text{e} \qquad 9{,}876543209 \times 10^{-1}.$$

Cancelamento catastrófico

É um efeito presente nas operações em ponto flutuante, caracterizado pelo aumento significativo do erro relativo no resultado da operação. O cancelamento catastrófico pode ser verificado principalmente na operação de subtração de dois pontos flutuantes muito próximos.

Vamos considerar a operação em ponto flutuante associada à subtração dos números racionais 0,9876543210423456789 e 0,9876543209.

Se os registros forem de 10 dígitos, a representação dos dois números será respectivamente

$$9{,}876543210 \times 10^{-1} \qquad \text{e} \qquad 9{,}876543209 \times 10^{-1}.$$

A diferença exata entre os dois números é de

$$1{,}423456789 \times 10^{-11}$$

enquanto que o resultado da operação de diferença em ponto flutuante é

$$1{,}00000000 \times 10^{-11}.$$

Cancelamento catastrófico

Um outro exemplo clássico é o das raízes de uma equação polinomial de segundo grau.

Cancelamento catastrófico

Um outro exemplo clássico é o das raízes de uma equação polinomial de segundo grau.

Seja a equação de segundo grau

$$x^2 + 400x - 0,00004617 = 0.$$

Essa equação possui duas raízes reais, uma próxima a -400 e outra próxima a 0.

Cancelamento catastrófico

Um outro exemplo clássico é o das raízes de uma equação polinomial de segundo grau.

Seja a equação de segundo grau

$$x^2 + 400x - 0,00004617 = 0.$$

Essa equação possui duas raízes reais, uma próxima a -400 e outra próxima a 0. As raízes são dadas exatamente por

$$\frac{-400 - \sqrt{400^2 + 4 \times 0,00004617}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-400 + \sqrt{400^2 + 4 \times 0,00004617}}{2}.$$

Cancelamento catastrófico

Um outro exemplo clássico é o das raízes de uma equação polinomial de segundo grau.

Seja a equação de segundo grau

$$x^2 + 400x - 0,00004617 = 0.$$

Essa equação possui duas raízes reais, uma próxima a -400 e outra próxima a 0. A sequência de operações em ponto flutuante utilizada para calcular as raízes é dada por

$$\left(-b \ominus fl\sqrt{(b \otimes b) \ominus (4 \otimes c)}\right) \oslash 2$$

e

$$\left(-b \oplus fl\sqrt{(b \otimes b) \ominus (4 \otimes c)}\right) \oslash 2$$

onde $b = 4{,}000000000 \times 10^2$ e $c = -4{,}617000000 \times 10^{-5}$.

Cancelamento catastrófico

Substituindo os valores e realizando as operações, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \left(-b \ominus fl\sqrt{(b \otimes b) \ominus (4 \otimes c)}\right) \oslash 2 \\
= \quad & \big(-4{,}000000000 \times 10^2 \\
& \ominus fl\sqrt{1{,}600000000 \times 10^5 \oplus 1{,}846800000 \times 10^{-4}}\big) \oslash 2 \\
= \quad & \left(-4{,}000000000 \times 10^2 \ominus fl\sqrt{1{,}600000002 \times 10^5}\right) \oslash 2 \\
= \quad & \left(-4{,}000000000 \times 10^2 \ominus 4{,}000000002 \times 10^2\right) \oslash 2 \\
= \quad & -4{,}000000001 \times 10^2,
\end{aligned}
$$

Realizando as operações para a outra raiz, obtemos o valor $1{,}000000000 \times 10^{-7}$.

Cancelamento catastrófico

O valor da primeira raiz com os dezesseis primeiros dígitos exatos é $-400{,}0000001154249\ldots$ e há concordância com os dez primeiros dígitos obtidos na operação em ponto flutuante. O mesmo não ocorre com a segunda raiz. Neste caso, o valor com dezesseis dígitos exatos é $1{,}154249999666926\ldots \times 10^{-7}$ e, à exceção do primeiro dígito, todos os seguintes diferem, o que caracteriza o cancelamento catastrófico.

Cancelamento catastrófico

O valor da primeira raiz com os dezesseis primeiros dígitos exatos é $-400{,}0000001154249\ldots$ e há concordância com os dez primeiros dígitos obtidos na operação em ponto flutuante. O mesmo não ocorre com a segunda raiz. Neste caso, o valor com dezesseis dígitos exatos é $1{,}154249999666926\ldots \times 10^{-7}$ e, à exceção do primeiro dígito, todos os seguintes diferem, o que caracteriza o cancelamento catastrófico.

A inexatidão no cálculo da segunda raiz pode ser diminuída consideravelmente se manipularmos a expressão de maneira a evitar a subtração de dois pontos flutuantes muito próximos.

Cancelamento catastrófico

O valor da primeira raiz com os dezesseis primeiros dígitos exatos é $-400{,}0000001154249\ldots$ e há concordância com os dez primeiros dígitos obtidos na operação em ponto flutuante. O mesmo não ocorre com a segunda raiz. Neste caso, o valor com dezesseis dígitos exatos é $1{,}154249999666926\ldots \times 10^{-7}$ e, à exceção do primeiro dígito, todos os seguintes diferem, o que caracteriza o cancelamento catastrófico.

A inexatidão no cálculo da segunda raiz pode ser diminuída consideravelmente se manipularmos a expressão de maneira a evitar a subtração de dois pontos flutuantes muito próximos.

Analisando a expressão para a segunda raiz, podemos verificar que a operação inexata é a subtração presente na soma dos termos $-b$ e $\sqrt{b^2 - 4c}$. Neste exemplo, em valores absolutos, b é muito maior que c, portanto a representação em ponto flutuante do termo $\sqrt{b^2 - 4c}$ partilha muitos dígitos em comum com a representação de b.

Cancelamento catastrófico

Evitamos o cancelamento catastrófico em ponto flutuante realizando o cancelamento na própria expressão, antes de realizarmos as operações em ponto flutuante:

Cancelamento catastrófico

Evitamos o cancelamento catastrófico em ponto flutuante realizando o cancelamento na própria expressão, antes de realizarmos as operações em ponto flutuante:

$$\begin{aligned}
-b+\sqrt{b^2-4c} &= \\
&= -b+|b|\sqrt{1-\frac{4c}{b^2}} \\
&= -b+|b|\left(1-\frac{2c}{b^2}+\dots\right) \\
&\approx -b+|b|\left(1-\frac{2c}{b^2}\right)
\end{aligned}$$

Cancelamento catastrófico

Como $b > 0$, a segunda raiz pode ser calculada a partir da aproximação

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \approx -\frac{c}{b}.$$

Substituindo os valores das constantes b, c e realizando as operações em ponto flutuante, obtemos a aproximação $1{,}154250000 \times 10^{-7}$ que possui um erro muitas vezes menor.

Instabilidade relacionada ao canc. catastr.

Vamos estudar agora um exemplo no qual o cancelamento catastrófico leva à instabilidade numérica:

Fórmula de recorrência de Arquimedes (ou algoritmo Borchardt-Pfaff) para aproximar o valor de π.

Instabilidade relacionada ao canc. catastr.

Vamos estudar agora um exemplo no qual o cancelamento catastrófico leva à instabilidade numérica:

Fórmula de recorrência de Arquimedes (ou algoritmo Borchardt-Pfaff) para aproximar o valor de π.
Baseia-se na sucessiva aproximação de π através de polígonos de 6×2^n lados inscritos em um círculo unitário e por ele circunscritos.

Instabilidade relacionada ao canc. catastr.

Vamos estudar agora um exemplo no qual o cancelamento catastrófico leva à instabilidade numérica:

Fórmula de recorrência de Arquimedes (ou algoritmo Borchardt-Pfaff) para aproximar o valor de π.
Baseia-se na sucessiva aproximação de π através de polígonos de 6×2^n lados inscritos em um círculo unitário e por ele circunscritos.
Podemos utilizar duas fórmulas de recorrência:

$$s_{i+1} = \frac{\sqrt{s_i^2+1}-1}{s_i} \qquad \text{ou} \qquad s_{i+1} = \frac{s_i}{\sqrt{s_i^2+1}+1}$$

onde $s_0 = \left(\sqrt{3}\right)^{-1}$. E assim,

$$\pi \approx 6 \times 2^i \times s_i.$$

O valor exato é

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264\ldots$$

Instabilidade numérica – condicionamento

Um outro exemplo clássico é o das raízes de uma equação polinomial de segundo grau. Nesse caso, a instabilidade está relacionada à própria natureza do problema.

Instabilidade numérica – condicionamento

Um outro exemplo clássico é o das raízes de uma equação polinomial de segundo grau. Nesse caso, a instabilidade está relacionada à própria natureza do problema.

Seja o polinômio

$$P(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-20) = x^{20} - 210\,x^{19} + \ldots + 20!$$

Ou seja, P é um polinômio em x com raízes inteiras $1, 2, 3, \ldots, 20$.

Instabilidade numérica – condicionamento

Um outro exemplo clássico é o das raízes de uma equação polinomial de segundo grau. Nesse caso, a instabilidade está relacionada à própria natureza do problema.

Seja o polinômio

$$P(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-20) = x^{20} - 210\,x^{19} + \ldots + 20!$$

Ou seja, P é um polinômio em x com raízes inteiras $1, 2, 3, \ldots, 20$.

Vamos considerar agora o polinômio $\tilde{P}$:

$$\tilde{P}(x) = P(x) - 2^{-23}\,x^{19}.$$

Ou seja, $\tilde{P}$ é igual P a menos de um erro relativo de $5{,}7 \cdot 10^{-10}$ no coeficiente do termo x^{19}.

Instabilidade numérica – condicionamento

As raízes do polinômio $\tilde{P}$ são (com quatro dígitos após a vírgula)

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = 1{,}0000\ldots & x_6 = 5{,}9999\ldots & x_{10} = 10{,}8929\ldots + 1{,}1493\ldots i \\
x_2 = 2{,}0000\ldots & x_7 = 7{,}0003\ldots & x_{12} = 12{,}8217\ldots + 2{,}1234\ldots i \\
x_3 = 3{,}0000\ldots & x_8 = 7{,}99930\ldots & x_{14} = 15{,}3059\ldots + 2{,}7753\ldots i \\
x_4 = 4{,}0000\ldots & x_9 = 9{,}1472\ldots & x_{16} = 18{,}1813\ldots + 2{,}5489\ldots i \\
x_5 = 5{,}0000\ldots & x_{20} = 9{,}5020\ldots & x_{18} = 20{,}4767\ldots + 1{,}0390\ldots i \\
x_{11} = \overline{x_{10}} & x_{13} = \overline{x_{12}} & x_{15} = \overline{x_{14}} \\
x_{17} = \overline{x_{16}} & x_{19} = \overline{x_{18}} &
\end{array}
$$

Instabilidade numérica – condicionamento

As raízes do polinômio $\tilde{P}$ são (com quatro dígitos após a vírgula)

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = 1{,}0000\ldots & x_6 = 5{,}9999\ldots & x_{10} = 10{,}8929\ldots + 1{,}1493\ldots i \\
x_2 = 2{,}0000\ldots & x_7 = 7{,}0003\ldots & x_{12} = 12{,}8217\ldots + 2{,}1234\ldots i \\
x_3 = 3{,}0000\ldots & x_8 = 7{,}99930\ldots & x_{14} = 15{,}3059\ldots + 2{,}7753\ldots i \\
x_4 = 4{,}0000\ldots & x_9 = 9{,}1472\ldots & x_{16} = 18{,}1813\ldots + 2{,}5489\ldots i \\
x_5 = 5{,}0000\ldots & x_{20} = 9{,}5020\ldots & x_{18} = 20{,}4767\ldots + 1{,}0390\ldots i \\
x_{11} = \overline{x_{10}} & x_{13} = \overline{x_{12}} & x_{15} = \overline{x_{14}} \\
x_{17} = \overline{x_{16}} & x_{19} = \overline{x_{18}} &
\end{array}
$$

Um erro relativo de $5{,}7 \cdot 10^{-10}$ no coeficiente x^{19} foi capaz de alterar drasticamente parte das raízes. Como entender esse fenômeno?