Projeto 3

8 de abril de 2009

A curva descrita por um cabo suspenso pelas suas extremidades é denominada "curva catenária".

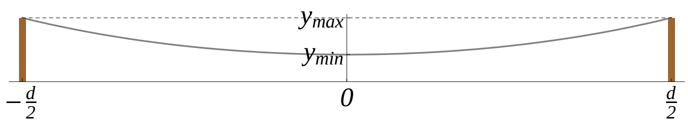

Figura 1: Diagrama de um cabo suspenso.

A equação que descreve a curva é obtida supondo que o cabo é um material flexível porém incapaz de ser comprimido ou distendido. Ou seja, supomos que dada uma extensão de cabo de tamanho l, o mesmo pode mudar de forma sob a ação de forças mas o seu comprimento será sempre l.

A seção a seguir descreve o desenvolvimento da equação diferencial para a catenária. Essa seção pode ser pulada em uma primeira leitura.

Desenvolvimento da equação

De acordo com as variáveis na figura 1, a catenária possui a expressão dada por

$$y(x) = \frac{T}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{T} x\right) + y_{min} - \frac{T}{\rho g}. \quad (1)$$

Seja $y(x)$ a equação que descreve o cabo suspenso. Vamos fazer a análise de forças que agem sobre uma seção de tamanho h do cabo.

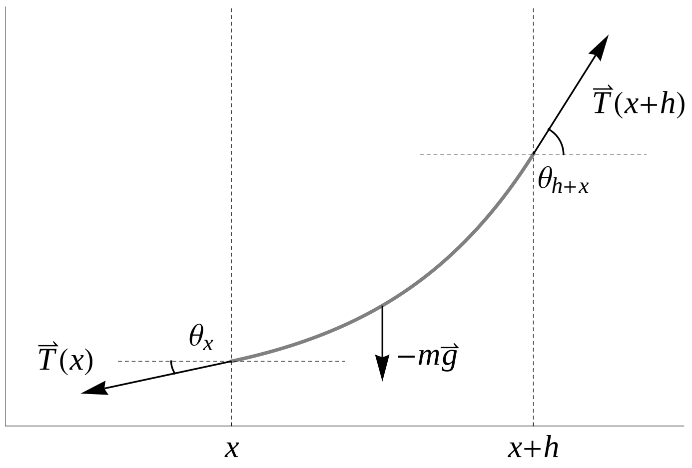

Figura 2: Forças sobre uma seção do cabo.

Admitimos que o cabo está em uma situação estática, portanto a resultante de forças sobre qualquer seção do cabo é nula. A extremidade esquerda sofre a ação de uma tensão $\overrightarrow{T}(x)$, enquanto que a extremidade direita sofre uma tensão $\overrightarrow{T}(x+h)$. O primeiro vetor forma uma ângulo $\pi + \theta_x$ com o eixo x e o último, um ângulo θ_{x+h}. Por fim o cabo sofre ação da força gravitacional, dada por $-m\overrightarrow{g}$, onde

$$m = \rho \int_x^{x+h} \sqrt{1 + (y'(\zeta))^2} d\zeta \tag{2}$$

é a massa do cabo[1] e ρ a sua densidade linear de massa.

A componente horizontal da resultante das forças sobre o cabo é

$$T(x) \cos \theta_x - T(x+h) \cos \theta_{x+h} = 0,$$

ou seja,

$$T(x) \cos \theta_x = T(x+h) \cos \theta_{x+h}, \tag{3}$$

onde $T(x) = \left\| \overrightarrow{T}(x) \right\|_2$ e $T(x+h) = \left\| \overrightarrow{T}(x+h) \right\|_2$ são as normas euclideanas usuais para os vetores tensão nos pontos x e $x+h$. Note que a igualdade na expressão (3) não depende de h, portanto temos que a componente horizontal da tensão no cabo é uma constante.

$$T(x) \cos \theta_x = T(x+h) \cos \theta_{x+h} = T. \tag{4}$$

[1] A massa do segmento de cabo é obtida multiplicando a densidade linear pelo comprimento do segmento. Por sua vez, o segmento é calculado da seguinte forma. Uma curva em duas dimensões parametrizada por uma variável $\zeta \in I \subseteq \mathbb{R}$ é formada pelo conjunto de pontos $\{(f(\zeta), g(\zeta)) \in \mathbb{R}^2 | \zeta \in I \subseteq \mathbb{R}\}$. O comprimento de um segmento de curva para $\zeta \in [a, b] \subset I$ é dado pela expressão

$$\int_a^b \sqrt{(f'(\zeta))^2 + (g'(\zeta))^2} d\zeta.$$

A componente vertical da resultante da forças sobre o cabo é

$$T(x+h)\,\text{sen}\theta_{x+h} - T(x)\,\text{sen}\theta_x - mg = 0,$$

ou seja, de acordo com a expressão (2),

$$T(x+h)\,\text{sen}\theta_{x+h} - T(x)\,\text{sen}\theta_x = \rho g \int_x^{x+h} \sqrt{1+(y'(\zeta))^2}d\zeta. \tag{5}$$

Os ângulos θ_x e θ_{x+h} estão relacionados à curva dada pela função $y(x)$ pela relação $\theta_x = \tan^{-1}(y'(x))$, de modo que o termo $\text{sen}\theta_x$ pode ser desenvolvido de acordo com

$$\begin{aligned}
\text{sen}\theta_x &= \cos(\theta_x)\,\frac{\text{sen}\theta_x}{\cos\theta_x} \\
&= \cos(\theta_x)\tan\theta_x \\
&= \cos(\theta_x)\tan\left(\tan^{-1}\left(y'(x)\right)\right) \\
&= \cos(\theta_x)\,y'(x).
\end{aligned}$$

O mesmo pode ser feito para $\text{sen}\theta_{x+h}$. Dessa forma, a expressão (5) pode ser reescrita como

$$T(x+h)\,\cos(\theta_{x+h})\,y'(x+h) - T(x)\,\cos(\theta_x)\,y'(x) = \rho g \int_x^{x+h} \sqrt{1+(y'(\zeta))^2}d\zeta$$

e a partir de (4) temos

$$T\,y'(x+h) - T\,y'(x) = \rho g \int_x^{x+h} \sqrt{1+(y'(\zeta))^2}d\zeta.$$

Dividindo pelo termo constante $T \times h$,

$$\frac{y'(x+h)-y'(x)}{h} = \frac{\rho g}{T}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \sqrt{1+(y'(\zeta))^2}d\zeta\right).$$

O limite $h \to 0$ da expressão acima leva à equação diferencial ordinária (EDO)

$$y''(x) = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1+(y'(x))^2}$$

que descreve o comportamento para a função y, que satisfaz as hipóteses iniciais. Para obter a forma final da curva catenária (1), resolvemos o problema de valor inicial associado à EDO acima sujeita às condições inciais, $y(0) = y_{min}$ e $y'(0) = 0$.

Aproximação numérica para a tensão no cabo

A exigência de que no ponto $x = \dfrac{d}{2}$, a altura do cabo é y_{max} inter-relaciona as demais constantes do problema:

$$y_{max} = \frac{T}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{T}\frac{d}{2}\right) + y_{min} - \frac{T}{\rho g}. \tag{6}$$

Assim, uma vez conhecidos cinco dos parâmetros ρ, g, T, d, y_{min} e y_{max}, o outro pode ser determinado a partir da solução numérica da equação (6). Uma vez determinados os parâmetros ρ, g e T, podemos calcular a tensão $T(x)$ em qualquer ponto do cabo[2]:

$$T(x) = T\sqrt{1 + (y'(x))^2} = T\sqrt{1 + \text{senh}^2\left(\frac{\rho g}{T}x\right)}. \tag{7}$$

Como exemplo, vamos considerar o exemplo, dado pelos parâmetros, $\rho = 1\dfrac{Kg}{m}$, $g = 9.8\dfrac{m}{s^2}$, $d = 100m$, $y_{min} = 5m$ e $y_{max} = 15m$. Inicialmente vamos buscar determinar a tensão horizontal, T. De acordo com a equação (6), T deve satisfazer a equação

$$15 = \frac{T}{9.8} \cosh\left(\frac{9.8}{T} \times 50\right) + 5 - \frac{T}{9.8}.$$

Ou seja devemos determinar o zero da função

$$f(x) = \frac{x}{9.8} \cosh\left(\frac{9.8}{x} \times 50\right) - \frac{x}{9.8} - 10.$$

Uma aproximação grosseira para a tensão horizontal é obtida considerando que a curva é formada por duas retas de acordo com o diagrama da figura 3.

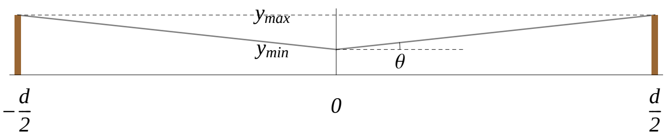

Figura 3: Diagrama simplificado.

[2]A expressão (7) é obtida com um pequeno esforço algébrico. Considerando as equações do desenvolvimento com as substituições $x \mapsto 0$ e $h \mapsto x$, podemos concluir a partir da razão entre as componentes vertical e horizontal que

$$\tan\theta_x = y'(x) = \rho g \int_0^x \sqrt{1 + (y'(\zeta))^2} d\zeta.$$

Por outro lado, como $\cos\theta_x = \dfrac{T}{T(x)}$, temos que

$$\text{sen}\theta_x = \sqrt{1 - \frac{T^2}{T(x)^2}}.$$

Aplicando essa última relação na componente vertical e utilizando a primeira relação acima, obtemos o resultado.

Nesse caso, o balanço da forças é um problema simples de geometria. A solução permite aproximar a tensão horizontal por

$$T \approx \frac{\rho g d}{4\left(y_{min} - y_{max}\right)} \sqrt{\left(y_{min} - y_{max}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

A partir dos dados do problema, temos que

$$T \approx 1249.$$

O gráfico de f próximo à essa aproximação nos indica que estamos no caminho certo:

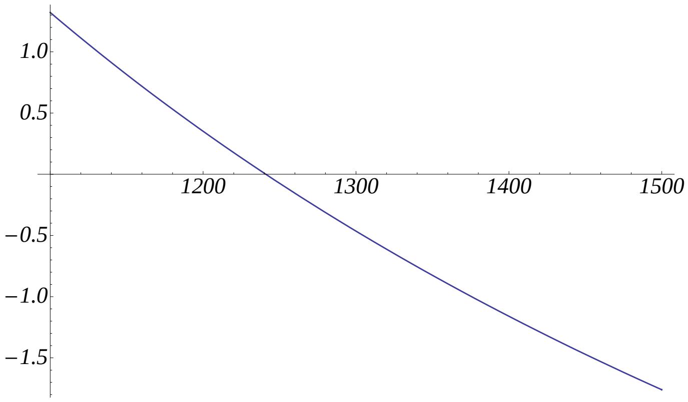

Figura 4: Gráfico para a função f.

Basta agora aplicar o método da secante (ou o método Newton-Raphson, se assim o quiseres) com aproximações iniciais $x_0 = 1200$ e $x_1 = 1300$, por exemplo. Realizando uma escolha para a tolerância no resíduo de 10^{-12}, após 43 iterações temos uma solução aproximada com 5 dígitos exatos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1200.0000000000000000, \\ x_1 &= 1300.0000000000000000, \\ x_2 &= 1243.0211944952297927, \\ x_3 &= 1240.8980589050049730, \\ x_4 &= 1240.9980421351692712, \\ x_5 &= 1240.9978732059962567, \\ x_6 &= 1240.9978731918899939. \end{aligned}$$

Assim, sabemos que

$$T^* = 1240.9\ldots$$

ou ainda, que a melhor aproximação com 5 dígitos de precisão é

$$T^* \approx 1241.0$$