Lista 4

1) Um sistema da forma
$$x' = f(x),$$
onde $f(x) = -\nabla V$ e $V(x)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$é denominado "sistema gradiente". Caracterize a estabilidade de um ponto fixo em sistemas dessa forma.

2) Seja M um domínio anular no $\mathbb{R}^2$ e f um campo vetorial planar que aponta para a região interna de M ao longo das duas fronteiras. Agora suponha que todo segmento radial contido em M é um arco transversal ao campo f, demonstre que nesse caso existe uma solução periódica contida em M. (Sugestão: utilize o teorema de Bendixson).

3) Dado uma EDO autônoma no plano
$$x' = f(x),$$
com $f \in \mathcal{C}\left(U, \mathbb{R}^2\right)$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e conexo. Suponha que $div\, f = 0$ em algum domínio simplesmente conexo $M \subseteq U$. Demonstre que existe uma função $F(x)$ tal que $(f)_1\,(x) = \dfrac{\partial F}{\partial x_2}(x)$ e $(f)_2\,(x) = -\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x)$. Demonstre que qualquer órbita $\gamma(x)$ satisfaz $F\left(\gamma(x)\right) = const$. Utilize esse resultado para tratar a equação de Newton
$$x'' = f(x)$$
para o movimento de um corpo de massa unitária sob a ação de uma força f que depende apenas da posição em um domínio da reta $\mathbb{R}$.

4) (Critério de Bendixson). Suponha que $div\, f$ não muda de sinal nem é identicamente nulo em uma região simplesmente conexa $U \subset \mathbb{R}^2$. Utilize o teorema da divergência para demonstrar que nesse caso não podem existir órbitas periódicas inteiramente contidas em U.

5) Utilize o critério de Bendixson para demonstrar que a EDO
$$x'' + p(x)x' + q(x) = 0$$
não admite soluções periódicas se $p > 0$.