Lista Zero – Equações Diferenciais Parciais

Prof. Diego Marcon

Lista de exercícios preparatória para o início do curso. Comtempla:

- Revisão de regras de diferenciação do cálculo vetorial e teoremas de integração;
- Cálculo de integrais multi-dimensionais.

Ao longo do nosso curso, o vetor gradiente é sempre calculado utilizando a estrutura Euclidiana usual dada pelo produto escalar

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k.$$

Lembre que a derivada de uma função escalar $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, em um ponto $x \in \Omega$, é um funcional linear do tipo $\mathrm{d}u(x) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$. O Teorema da Representação de Riesz, com o produto escalar usual, implica na existência de único vetor $w \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$\mathrm{d}u(x) \cdot y = \langle y, w \rangle, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^d.$$

Este vetor $w \in \mathbb{R}^d$ é chamado de vetor gradiente de u em x e denotado $w = \nabla u(x)$.

Exercício 1. Justifique as afirmações abaixo.

(i) Dada a função $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = |x|^2/2$, prove que u é diferenciável e vale:

$$\mathrm{d}u(x) = x^t \quad \text{e} \quad \nabla u(x) = x.$$

A notação x^t acima significa o seguinte: para cada $x \in \mathbb{R}^d$ fixado, $x^t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ é o funcional linear dado por

$$x^t(v) = \langle v, x \rangle.$$

(ii) Para $y \in \mathbb{R}^d$ fixado, considere a função $v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $v(x) = x \cdot y$. Prove que v é diferenciável e satisfaz, para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{d}v(x) = y^t \quad \text{e} \quad \nabla v(x) = y.$$

(iii) A função $w : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $w(x) = |x|$ é diferenciável para todo $x \neq 0$ e, neste caso, tem-se

$$\mathrm{d}w(x) = \frac{x^t}{|x|} \quad \text{e} \quad \nabla w(x) = \frac{x}{|x|}.$$

(iv) Fixado um número real $\alpha \geq 2$, a função $z : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $z(x) = |x|^\alpha$ é diferenciável e

$$\mathrm{d}z(x) = \alpha |x|^{\alpha-2} x^t \quad \text{e} \quad \nabla z(x) = \alpha |x|^{\alpha-2} x.$$

Para $\alpha < 2$, a função z é diferenciável em todo $x \neq 0$ e vale a mesma fórmula.

Dica: Usar a Regra da Cadeia e o item anterior.

Exercício 2. Prove as fórmulas abaixo referentes a funções $u, v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ e ao campo $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

(i) $\operatorname{div}(uF) = \nabla u \cdot F + u \operatorname{div} F$.

(ii) $\operatorname{div}(u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$.

(iii) $\Delta(uv) = v\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$.

(iv) Mostrar que

$$(uF)'(x) \cdot y = u(x)\big(F'(x) \cdot y\big) + \big(\mathrm{d}u(x) \cdot y\big)F(x).$$

Ou ainda,

$$(uF)'(x) = u(x)F'(x) + F(x) \otimes \nabla u(x)$$

onde, dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^d$, a notação tensorial $v \otimes w$ indica a transformação linear $v \otimes w : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de posto um dada por[1]

$$(v \otimes w)(y) = \langle y, w \rangle v,$$

cuja representação canônica matricial tem entradas $(v \otimes w)_{ij} = v_i w_j$.

(v) Algumas referências usam a notação $\nabla F(x) := F'(x)^T$, onde o superescrito T indica "transposta". Neste caso, o item anterior pode ser reescrito como

$$\nabla(uF)(x) = u(x)\nabla F(x) + \nabla u(x) \otimes F(x).$$

Dica: Notar que $(x \otimes y)^T = y \otimes x$.

Exercício 3. Sejam u, v, w, z como no Exercício 1. Determine algumas de suas derivadas, como segue.

(i) $\nabla^2 u(x) = \mathrm{Id}$. Em particular, independe de x e, portanto, suas derivadas mais altas são nulas.

(ii) $\nabla^2 v(x) = 0$ (matriz nula).

(iii) $\nabla^2 w(x) = |x|^{-1}\,\mathrm{Id} - |x|^{-3} x \otimes x = |x|^{-1}\left(\mathrm{Id} - \dfrac{x}{|x|} \otimes \dfrac{x}{|x|}\right)$.

Dica: utilizar o item (iv) do Exercício 2.

(iv) $\nabla^2 z(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}\,\mathrm{Id} + \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-4} x \otimes x = \alpha|x|^{\alpha-2}\left(\mathrm{Id} + (\alpha-2)\dfrac{x}{|x|} \otimes \dfrac{x}{|x|}\right)$.

(v) $\Delta u(x) \equiv d$.

(vi) $\Delta v(x) \equiv 0$.

(vii) $\Delta w(x) = (d-1)|x|^{-1}$.

Dica: lembre que o traço é uma operação linear e mostre que $\operatorname{tr}(x \otimes y) = x \cdot y$.

$(viii)$ $\Delta z(x) = \alpha(d + \alpha - 2)|x|^{\alpha-2}$.

(ix) A função $z^\star(x) = |x|^{2-d}$ é harmônica em $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ para $d > 2$. Para $d = 2$ também é harmônica, mas é constante (e, logo, trivial).

Exercício 4. Mostre que se $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ é uma função harmônica e $O \in \mathrm{SO}(d)$, então a função $v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $v(x) := u(Ox)$ também é de classe $C^2(\mathbb{R}^d)$ e harmônica.

Dica: Lembre que $\mathrm{SO}(d)$ é o conjunto das matrizes reais de ordem d que satisfazem $O^T = -O$ e $\det O = 1$. Além disso, se a transformação T é definida por $T(x) := Ox$, então $T'(x) = O$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Com estas informações, você pode aplicar a Regra da Cadeia para estudar o problema.

Exercício 5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio aberto limitado e com fronteira de classe C^1. A partir do Teorema da Divergência, mostre as seguintes identidades. Como dica, usar identidades do Exercício 2.

---

[1] Ao utilizar esta notação, estamos usando implicitamente a estrutura Euclidiana usual para identificar $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d \otimes (\mathbb{R}^d)^*$. O isomorfismo $\mathbb{R}^d \otimes (\mathbb{R}^d)^* \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, por sua vez, é canônico e não faz uso dessa estrutura. Poderíamos ter escrito diretamente $F(x) \otimes \mathrm{d}u(x)$, que age em $\mathbb{R}^d$ sem recorrer ao produto escalar. Optamos pela conveniência de identificar $\mathbb{R}^d$ com o seu dual. Se você não sabe o que é o produto tensorial de dois espaços vetoriais, ignore esta nota de rodapé e pense apenas que introduzimos uma nova notação $v \otimes w$ neste exercício.

(i) Para uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e um campo vetorial $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, ambos de classe $C^1(\overline{\Omega})$, vale

$$\int_\Omega u(x) \operatorname{div} F(x) \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot F(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v(x) F(x) \cdot \nu(x) \, \mathrm{d}\sigma(x).$$

(ii) Para funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(\overline{\Omega})$, vale[2]

$$\int_\Omega v(x) \Delta u(x) \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \, \mathrm{d}\sigma(x).$$

Esta fórmula de integração por partes também é conhecida como *Primeira Fórmula de Green*.

(iii) Para funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(\overline{\Omega})$, temos

$$\int_\Omega \Big(v(x) \Delta u(x) - u(x) \Delta v(x) \Big) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \right) \mathrm{d}\sigma(x).$$

Esta fórmula é conhecida como *Segunda Fórmula de Green*.

(iv) Para funções $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $k \in \{1, 2, \ldots, d\}$, vale a seguinte fórmula de integração por partes

$$\int_\Omega v(x) \partial_k u(x) \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x) \partial_k v(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \nu_k(x) \, \mathrm{d}\sigma(x).$$

(v) Para funções $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, vale a seguinte fórmula de integração por partes, em forma vetorial,

$$\int_\Omega v(x) \nabla u(x) \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x) \nabla v(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \nu(x) \, \mathrm{d}\sigma(x).$$

Exercício 6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio aberto limitado e com fronteira de classe C^1 e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\overline{\Omega})$.

(i) Mostre que

$$\int_\Omega \Delta u(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \, \mathrm{d}\sigma(x).$$

(ii) Mostre que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x) \nu(x) \, \mathrm{d}\sigma(x).$$

(iii) Prove que a igualdade do item anterior valer para qualquer função $u \in C^1(\overline{\Omega})$ é equivalente ao Teorema da Divergência.

Outra ferramenta muito útil no cãlculo de integrais multi-dimensionais são as fórmulas de integração em coordenadas polares

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \int_{\partial B_r(x_0)} f(x) \, \mathrm{d}\sigma(x) \, \mathrm{d}r.$$

ou ainda, para cada $R > 0$,

$$\int_{B_R(x_0)} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^R \int_{\partial B_r(x_0)} f(x) \, \mathrm{d}\sigma(x) \, \mathrm{d}r. \tag{1}$$

Além disso, a fórmula de mudança de variáveis pode ser combinada:

$$\int_{\partial B_r(x_0)} f(x) \, \mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\partial B_1(x_0)} f(ry) r^{d-1} \, \mathrm{d}\sigma(y) = \int_{\partial B_1(0)} f(x_0 + ry) r^{d-1} \, \mathrm{d}\sigma(y).$$

[2]Por definição, para $x \in \partial\Omega$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$.

Nos exercícios que seguem, e em todo nosso curso, denotamos por ω_d o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^d$. Uma fórmula explícita para ω_d, que é geralmente desnecessária para os nossos propósitos, é a seguinte:

$$\omega_d = |B_1(x)| = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)},$$

Acima, apenas como um truque para memorização, nós denotamos informalmente $(d/2)! = \Gamma(1+d/2)$, onde $\Gamma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é a conhecida "função Gamma", dada por

$$\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} s^{t-1} e^{-s}\, \mathrm{d}s,$$

e que tem a propriedade $\Gamma(1+n) = n!$. Em particular, nossa fórmula fica rigorosa em dimensões pares.

Utilizando ainda a fórmula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_{B_r(x_0)} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\partial B_r(x_0)} f(x)\, \mathrm{d}\sigma(x).$$

considere os exercícios abaixo.

Exercício 7. Na notação acima, justifique as seguintes afirmações.

(*i*) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \operatorname{Vol} B_r(x_0) = \operatorname{Area} \partial B_r(x_0)$.

(*ii*) $\operatorname{Vol} B_r(x_0) = \omega_d r^d$.

(*iii*) $\operatorname{Area} \partial B_r(x_0) = d\omega_d r^{d-1}$ e, em particular, $\operatorname{Area}(\partial B_1) = d\omega_d$.

(*iv*) Calcule os volumes e áreas em dimensões $d \in \{1,2,3,4,5\}$ e interprete seu resultado com fórmulas já conhecidas de geometria elementar.

Exercício 8. Mostre que $u(x) := |x|^{2-d}$ é localmente integrável em $\mathbb{R}^d$ ao mostrar que

$$\int_{B_r} \frac{1}{|x|^{d-2}}\, \mathrm{d}x = \frac{d\omega_d r^2}{2},$$

onde $B_r := B_r(0)$.

Exercício 9. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, decidir sobre a integrabilidade (ou não) da função $u(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^d$, perto da origem e no infinito. Mais precisamente, estude a convergência das integrais

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x|^\alpha\, \mathrm{d}x, \quad \int_{B_\varepsilon(0)} |x|^\alpha\, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^d \smallsetminus B_R(0)} |x|^\alpha\, \mathrm{d}x$$

e calcule o seu valor, quando possível.

Exercício 10. Sendo $e_d \in \mathbb{R}^d$ o último vetor da base canônica do $\mathbb{R}^d$, considere o hiperplano

$$H := \{e_d\}^\perp = \{y \in \mathbb{R}^d; y_d = 0\}$$

Para $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ com $\tilde{x}_d > 0$, mostre que

$$\int_H \frac{1}{|x - \tilde{x}|}\, \mathrm{d}x = \frac{d\omega_d}{2\tilde{x}_d}$$

Exercício 11. Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2}\, \mathrm{d}x = \pi^{d/2}.$$

Dica: Considerar inicialmente o caso $d = 1$ e concluir o caso geral separando em d integrais unidimensionais. Por sua vez, o caso $d = 1$ pode ser obtido procedendo como segue:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = \pi.$$

Exercício 12. Mostrar a seguinte representação para o Lapaciano de uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega)$, em um ponto $x \in \operatorname{int}\Omega$:

$$\Delta u(x) = \lim_{r\to 0} \frac{c_1}{r^2} \fint_{\partial B_r(x)} \Big(u(y) - u(x)\Big)\,\mathrm{d}y = \lim_{r\to 0} \frac{c_2}{r^2} \fint_{B_r(x)} \Big(u(y) - u(x)\Big)\,\mathrm{d}y.$$

Esta fórmula nos dá uma interpretação do Laplaciano como uma medida infinitesimal do quanto u é diferente de sua da média em bolas (ou esferas) de raio pequeno. Funções cujo Laplaciano é pequeno, neste sentido, são muito próximas de suas médias em esferas pequenas; funções harmônicas são iguais as suas médias (Propriedade do Valor Médio).

Dica: usar a Fórmula de Taylor e calcular explicitamente algumas das integrais, diretamente ou com o auxílio de teoremas de integração.