Equações Diferenciais Parciais

Diego Marcon

1 de junho de 2023

Algumas notas para acompanhamento da disciplina da UFRGS em 2023-1 cujo título é "Equações Diferenciais Parciais Elípticas II".

Como principais referências estão Evans, Gilbarg-Trudinger, notas de aula, etc.

1 Introdução ao curso

O objetivo deste curso é estudar as equações diferenciais parciais (EDPs) lineares dos tipos elíptico, parabólico e hiperbólico, enfatizando o ponto de vista das soluções fracas. Abordamos questões de existência e, quando possível, unicidade das soluções, bem como suas propriedades qualitativas.

Para uma melhor compreensão, é importante ter em mente alguns exemplos típicos de cada um dos tipos de EDPs acima. O protótipo de uma EDP elíptica é a equação de Laplace (quando $f \equiv 0$) ou de Poisson (para f geral) em $\mathbb{R}^d$:

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^d.$$

O protótipo de uma EDP parabólica é a equação do calor:

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^d.$$

Deve-se observar que o operador Laplaciano acima é somente com respeito às variáveis espaciais e não inclui a variável temporal, isto é,

$$\Delta u(t,x) = \sum_{k=1}^{d} \partial^2_{x_k x_k} u(t,x).$$

Por fim, o protótipo de uma EDP hiperbólica é a equação da onda:

$$\partial^2_{tt} u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^d.$$

Em certo sentido, poderíamos dizer que nosso curso pretende estender propriedades gerais destas três equações no caso em que o operador Laplaciano é substituído por operadores lineares mais gerais e possivelmente com coeficientes não constantes. No entanto, é importante ressaltar que essas equações mais gerais são importantes em muitas aplicações e não devem ser subestimadas. As equações elípticas, parabólicas e hiperbólicas aparecem em uma quantidade enorme de aplicações e os protótipos acima são casos particulares muito importantes. reescrever parágrafo

1.1 Estratégia na busca por soluções

Uma estratégia padrão na busca por soluções de equações matemáticas é o de expandir o conjunto onde estamos procurando as soluções. Isso é feito, por exemplo, na resolução de equações polinomiais quando passamos dos números reais para os complexos; e é feito em equações diferenciais ordinárias (EDOs) quando passamos das funções diferenciáveis para funções meramente contínuas.

1.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Vamos elaborar sobre o ponto mencionado das EDOs. Considere a EDO

$$x'(t) = f(x(t)), \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

onde $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ está por ser determinado e $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é, pelo menos, uma função contínua. Uma noção natural de solução para esta equação é uma função $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ que seja diferenciável em todos os pontos de seu domínio e que, também em todos os pontos, satisfaça a identidade acima. Somos assim levados então a procurar por soluções da EDO no conjunto

$$C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$$

das funções continuamente diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^d$. Este conjunto, no entanto, é, em certo sentido, "pequeno" para busca de soluções, o que torna a busca mais difícil.

A estratégia usualmente adotada, portanto, em cursos de EDO é a seguinte: pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a EDO acima pode ser reescrita como

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau))\, \mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

Para verificar a validade desta equação integral, basta que a função $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ seja contínua. O conjunto

$$C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$$

das funções continuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^d$, mais amplo do que o anterior, pode ser utilizado em conjunto com o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar a existência de uma função contínua que satisfaz a equação integral estudada.

Um caminho $x \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ que satisfaz (2) pode ser chamado uma solução fraca da EDO (1). Acontece que, no caso de uma função contínua satisfazer (2), ela deve ser necessariamente diferenciável, pois o Teorema Fundamental do Cálculo implica a função que está do lado direito da igualdade o é. Além disso, vale que

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(0) + \int_0^t f(x(\tau))\, \mathrm{d}\tau\right) = f(x(t)).$$

Segue, desta maneira, que toda solução fraca da EDO é uma solução usual, como esperávamos inicialmente.

A estratégia adotada acima pode ser resumida como segue. nós desconfiávamos ser possível encontrar uma solução no conjunto X_1. No entanto, não é possível (ou não conseguimos) provar tal existência pelas vias tradicionais. Então, enfraquecemos a noção usual de solução e passamos a procurar em um conjunto mais amplo X_2. Neste conjunto, conseguimos aplicar alguma técnica e provar existência de soluções. Finalmente, resta averiguar se esta solução que encontramos é, de fato, a que esperávamos que existia. Algumas vezes, pode ser. Outras, não.

1.1.2 Espaços de Sobolev

No caso de muitas equações diferenciais parciais, não apenas as que vemos neste curso, um contexto importante de trabalho é o dos Espaços de Sobolev.

Um ponto relativamente chato do curso é que precisamos, antes de passar ao estudo das EDPs propriamente ditas, nos familiarizar com o conceito dos Espaços de Sobolev e suas propriedades. Por outro lado, tais propriedades são notáveis em si só e muito bonitas, o que não faz a jornada tão cansativa. Para os nossos propósitos, convém não perder de vista o objetivo final das aplicações às EDPs.

No entanto, contradizendo o parágrado anterior, vamos tentar fazer no fim desta seção uma motivação, via EDPs, ao conceito de soluções fracas e a noção defunção de Sobolev. As técnicas, muito baseadas na ingênua integração por partes. No livro **??** de Bakry-Gentil-Ledoux, em referência às muitas ideias profundas oriundas deste tipo de técnica, os autores se perguntam: “How far can you go with the Cauchy-Schwarz inequality and integration by parts?”

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio limitado em que possa ser aplicado o Teorema da Divergência e o problema de provar existência de solução $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ para a equação de Poisson

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega.$$

Em princípio, tal solução deve ser uma função de classe $C^2(\Omega)$, ou pelo menos duas vezes diferenciável em Ω, que satisfaz a equação de Poisson em todos os pontos do domínio.

Uma maneira de enfraquecer esta noção de solução é a seguinte: dada uma “função teste” $v \in C_c^1(\Omega)$, multiplicamos a EDP por v e integramos em Ω para obter

$$-\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Agora, utilizando que v possui suporte compacto, intergação por partes implica que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

No caso de uma função $u \in C^1(\Omega)$ satisfazer a identidade acima para toda função $v \in C_c^2(\Omega)$, é possível mostrar que, em verdade, $u \in C^2(\Omega)$ e satisfaz e EDP em todos os pontos de Ω. Isso será, em particular, uma das consequências dos resultados do curso.

É importante notar, no entanto, que o que esboçamos acima, **não é a noção de solução fraca usual para a equação de Poisson**. Em parte, isto é porque o espaço C^1 ainda não é razoavelmente bom para encontrarmos uma solução da EDP. No caso do nosso curso, vamos além de tudo *enfraquecer a noção de diferenciabilidade* de uma função da forma $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. E aí é que entra Sobolev. Com estas ideias em mente, e de vez em quando voltando para esta introdução para não perder de vista os objetivos, passamos a estudar os Espaços de Sobolev.

2 Derivada fraca

A noção de derivada fraca, assim como de solução fraca, é baseada na fórmula de integração por partes, conforme passamos a descrever.

2.1 Preliminares no Teorema da Divergência

Começamos com um enunciado geral para o Teorema da Divergência.

Teorema 1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma superfície de classe C^1. Se o campo vetorial $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é de classe $C^1(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F(x)\cdot\nu(x)\,\mathrm{d}\sigma(x),$$

onde $\nu(x)$ denota o vetor normal unitário de $\partial\Omega$ que é exterior ao domínio Ω e σ denota a medida de elemento de área de $\partial\Omega$.

Este teorema será o ponto de partida do curso. Vários cálculos de integrais e diversas identidades são equivalentes a esta. Muitas coisas estão na lista de exercícios para prática de vocês.

Como já mencionamos, um caso de especial importância para nós é o de integração por partes, que pode ser descrito de várias maneiras.

Observação 2. A escolha de campo vetorial $F(x) = v(x)\nabla u(x)$ para funções escalares u, v nos fornece uma versão de fórmula de integração por partes, conhecida como a "primeira fórmula de Green". A fórmula vetorial

$$\operatorname{div} F(x) = \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + v(x)\Delta u(x)$$

no Teorema da Divergência implica que

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Como $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$, esta fórmula pode ser lembrada como segue (e aqui a semelhança com integração por partes): a derivada (divergente) que estava com ∇u passa para a função v (na forma de um gradiente – nem faria sentido o divergente de uma função), o sinal da integral é alterado (assim como na integração por partes unidimensional) e sobra um termo de fronteira (assim como no caso unidimensional). Outra analogia com o caso unidimensional é que a fórmula surge justamente com a utilização de uma regra do produto em um teorema de integração.

Observação 3. A escolha $F(x) = u(x)v(x)e_j$, a partir da regra do produto

$$\operatorname{div} F(x) = u_{x_k}(x)v(x) + u(x)v_{x_k}(x)$$

nos fornece

$$\int_\Omega u_{x_k}(x)v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)v_{x_k}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_k(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Esta última fórmula, escrita em fórmula vetorial, fica

$$\int_\Omega \nabla u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Note que os termos de fronteira se anulam quando alguma das funções possui suporte compacto em Ω.

Outro caso particular é quando uma das funções é constante. Por exemplo, para $v(x) \equiv 1$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Talvez repetir coisas que aparecerão na lista aqui

2.2 Derivadas fracas de ordem um

Nós dizemos que uma função localmente integrável $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ é fracamente diferenciável quando existe uma função $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que, para qualquer função teste $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega u(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Essa é uma identidade vetorial que vale se, e somente se, vale para cada uma das componentes dos vetores: isto é, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$,

$$\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v_j(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Neste caso, nós dizemos que v é a derivada fraca de u e utilizamos a notação $v_j = \partial_j u$ e $v = \nabla u$.

A derivada fraca é única a menos de conjuntos de medida nula, como mosrta a proposição abaixo. Além disso, como deveria ser, é um conceito mais abrangente do que de diferenciação usual.

Proposição 4. *Valem as seguintes afirmações.*

(i) *A derivada fraca é única, exceto por algum conjunto de medida nula.*

(ii) *Se $u \in C^1(\Omega)$, então u é fracamente diferenciável e sua derivada fraca $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é igual à derivada usual $\nabla u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ em quase todo ponto de Ω.*

Demonstração. Suponhamos que tanto v quanto w satisfaçam a definição de derivada fraca. Então, temos que

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega w(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Ou ainda,

$$\int_\Omega \big[v(x) - w(x)\big]\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo, por exercício da lista de exercícios, enunciado abaixo, $v = w$ em quase todo ponto, mostrando o item (i).

Para provar o item (ii), usamos a fórmula usual de integração por partes (que pode ser utilizada já que $u \in C^1(\Omega)$) e obtemos que

$$\int_\Omega u(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo, u é fracamente diferenciável e ∇u é uma derivada fraca de u. Pelo item anterior, $v = \nabla u$ em quase todo ponto. □

Vejamos alguns exemplos de funções não diferenciáveis que são fracamente diferenciáveis. Também alguns exemplos de funções que não são fracamente diferenciáveis.

Exemplo 5. Vamos mostrar que a função $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| > 1 \\ x+1, & \text{se } -1 < x < 0 \\ -x+1, & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

é fracamente diferenciável, com derivada

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| > 1 \\ 1, & \text{se } -1 < x < 0 \\ -1, & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

De fato, basta calcular

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} (x+1)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (-x+1)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (x+1)\varphi(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + (-x+1)\varphi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 -\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 -\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Algumas observações sobre este exemplo. Em primeiro lugar, note que os valores da função u nos pontos -1, 0 e 1 não foram especificados e, de fato, podem ser arbitrários sem alterar a diferenciabilidade fraca de u. Em particular, enquanto a diferenciabilidade usual implica em continuidade, diferenciabilidade fraca pode valer mesmo para funções descontínuas. Em segundo lugar, observe que, neste caso unidimensional, foi importante que $\lim_{x\to 0^-} u(x) = \lim_{x\to 0^+} u(x)$ para cancelar o termo $\varphi(0)$ e a função v ser um cadidato válido de derivada fraca.

Observe que a função

$$u_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 3 \\ x+1, & \text{se } -1 < x < 0 \\ -x+3, & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$$

não é fracamente diferenciável, sendo o "salto na origem", em certo sentido, o problema para existência de derivada fraca. De fato, a conta análoga à anterior é

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{3} u_2(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} (x+1)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} (-x+3)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (x+1)\varphi(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + (-x+3)\varphi(x)\Big|_{0}^{3} - \int_{0}^{3} -\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -2\varphi(0) - \left[\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} -\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right].\end{aligned}$$

Neste exemplo, especificamente, é ainda possível descrever um tipo de derivada fraca para u com base na fórmula de integração por partes; de fato, a medida de Dirac na origem δ_0 é a medida que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}\delta_0 = \varphi(0).$$

Daí,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\left[2\int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}\delta_0 + \int_{-1}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} -\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right] = -\int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}\mu,$$

onde $\mu = \nu + 2\delta_0$ com $\mathrm{d}\nu(x) = v(x)\,\mathrm{d}x$. Diz-se que, no sentido das distribuições, a derivada fraca de u_2 é a medida μ e se escreve $u_2' = \nu + 2\delta_0$, ou ainda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_2(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}u_2'(x).$$

No entanto, na nossa definição em que a derivada fraca deve ser uma função, esta função u_2 não é fracamente diferenciável.[1] Rigorosamente, para provar que não é diferenciável fracamente....

Exemplo 6. Assim como no exemplo anterior, função de Heaviside $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

não é fracamente diferenciável. Fica como exercício verificar que, caso fosse, deveríamos ter $H' = \delta_0$.

Exemplo 7. Na bola unitária $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$, vamos mostrar que a função $u : B_1(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} |x|^{-1}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

[1] A classe de funções cuja derivada é uma medida suficientemente regular é a classe das funções de variação limitada. Embora de extrema importância em análise, esta classe de funções não será utilizada no nosso curso.

é fracamente diferenciável. O candidato natural de derivada fraca é a função $v : B_1(0) \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$v(x) = \begin{cases} -|x|^{-3}x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Para $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$, temos, para cada $\varepsilon > 0$ fixado

$$\int_{B_1(0)} u(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} u(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{B_\varepsilon(0)} u(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Começamos estudando o primeiro termo. No domínio de integração em questão, a função u é diferenciável com derivada (no sentido clássico) igual a v. Podemos integrar por partes: observamos que o vetor normal exterior ao domínio $B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ na parte da fronteira referente a $\partial B_\varepsilon(0)$ é o vetor $-x/|x|$ e então obtemos

$$\int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} u(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x|^{-2}\varphi(x)x\,\mathrm{d}\sigma(x) - \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Para estudar o comportamento quando $\varepsilon \to 0$, note que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x|^{-2}\varphi(x)x\,\mathrm{d}\sigma(x) \right| &\leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x|^{-1}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &\leq \sup_{B_1(0)} |\varphi(x)|\varepsilon^{-1}\text{Area}(\partial B_\varepsilon(0)) \\ &= 4\pi\varepsilon \sup_{B_1(0)} |\varphi(x)| \end{aligned}$$

e portanto este termo vai para zero. As outras duas integrais convergem para as respectivas integrais em $B_1(0)$, pelo Teorema da Convergência Dominada, já que φ quanto $\nabla\varphi$ são funções de Lipschitz em B_1. Segue, em particular, que

$$\int_{B_1(0)} u(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{B_1(0)} v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

como havíamos afirmado.

Observe que o valor das funções na origem, neste exemplo, não é importante. Em verdade, estas funções poderiam estar definidas a menos de um conjunto de medida nula sem que fosse alterado o conceito.

2.3 Derivadas fracas de ordem dois

Para derivadas de ordem dois, basta aplicar novamente o raciocínio heurístico de integração por partes: uma função localmente integrável $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita duas vezes fracamente diferenciável quando existe uma função $v : \Omega \longrightarrow \mathrm{M}(d)$, note que com valores matriciais, tal que, para qualquer função teste $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, vale a fórmula

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)\nabla^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Note que não há sinal de menos na identidade já que, em termos heurísticos, estaríamos fazendo duas integrações por partes (e ficamos com dois sinais negativos). Dizemos que a função v é a segunda derivada fraca de u e denotamos $v(x) = \nabla^2 u(x)$. É possível verificar que, no caso de u possuir derivada fraca até ordem dois, o valor $v(x)$ é sempre uma matriz simétrica. Escrevendo a identidade matricial acima componente a componente, obtemos

$$\int_\Omega v_{ij}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)\partial_{ij}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Denotamos também

$$v_{ij} = \partial_{ij}\varphi \text{ ou } v_{ij} = u_{x_i x_j} \text{ ou ainda } v_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

2.4 Derivadas de ordem mais alta – multi-índices

Para o caso geral, é interessante recorrer a notação de multi-índice, que apesar de um pouco carregada, simplifica bastante a notação quando comparada à mais clássica. Um **multi-índice** é um elemento $\alpha \in \mathbb{N}^d$ que, para os nossos propósitos, representa o número de derivadas parciais com respeito à variável que está na respectiva posição. Assim, ao escrever $D^\alpha u(a)$, o número natural α_i que está na i-ésima posição do multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ indica que são tomadas α_i derivadas parciais com respeito à variável x_i. Por exemplo, para $u : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$, denotamos

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x_2^3 \partial x_3^2 \partial x_4}(a) = D^\alpha u(a), \quad \text{onde} \quad \alpha = (0, 3, 2, 1, 0).$$

Também é comum utilizar multi-índices para denotar monômios em várias variáveis: com o mesmo multi-índice α dado no exemplo acima, temos

$$x^\alpha = x_2^3 x_3^2 x_4, \quad \text{onde} \quad \alpha = (0, 3, 2, 1, 0).$$

De maneira geral, denotamos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$ e escrevemos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d} \quad \text{e} \quad D^\alpha u(a) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d} u}{\partial x_d^{\alpha_d}}(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}(a),$$

de modo que, nestes casos, $|\alpha|$ denota o grau do monômio e a ordem de diferenciação, respectivamente. Ainda, é também comum escrever

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d! \quad \text{e} \quad \binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha!} = \frac{d!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!},$$

o que simplifica a notação de expansões multinomiais como feito abaixo.

Exercício 1 (Teorema Multinomial)**.** Mostre que, para $N \in \mathbb{N}$ fixado e $x_1, x_2, \ldots x_k \in \mathbb{R}$, vale

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^N = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = N} \frac{N!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_k!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}.$$

Na notação introduzida acima, podemos escrever, mais sucintamente,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^N = \sum_{|\alpha| = N} \binom{N}{\alpha} x^\alpha, \quad \text{onde} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Dica: Mostrar o caso $k = 2$, muitas vezes conhecido como Binômio de Newton, e depois fazer indução em k.

Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, a fórmula de integração por partes aplicada $|\alpha|$ vezes, sendo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ uma função de suporte compacto, se lê

$$\int_\Omega D^\alpha u(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Essa é a identidade que motiva a definição de derivada fraca para a função u.

Nós dizemos que uma função localmente integrável $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivada fraca com respeito a $\alpha \in \mathbb{N}^d$ quando existe uma função $v_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, localmente integrável, tal que

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Quando u possui derivadas fracas com respeito a todo $\alpha \in \mathbb{N}^d$ com $|\alpha| = k \in \mathbb{N}$, dizemos que u é k vezes fracamente diferenciável. Equivalentemente, e até seguindo mais de perto as definições anteriores, u é k vezes fracamente diferenciável quando existe uma função $v : \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^* \otimes \cdots \otimes (\mathbb{R}^d)^*$ tal que

$$\int_\Omega u(x) D^k \varphi(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^k \int_\Omega v(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como antes, esta identidade vale se, e somente se, vale para cada uma das componentes dos tensores e, por isso, é equivalente à anterior.

3 Espaços de Sobolev

3.1 Preliminares em espaços normados e com produto interno

Um espaço normado é um espaço vetorial V munido de uma norma $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que, por definição, satisfaz as propriedades abaixo.

(i) Para todo $v \in V$, tem-se $\|v\| \geq 0$. Além disso, $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

(ii) Para todo $v \in V$ e todo $c \in \mathbb{R}$, vale $\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$.

(iii) Para quaisquer $v, w \in V$, tem-se a desigualdade triangular $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Em dimensão finita, todas as normas de um espaço vetorial são equivalentes, no sentido de gerar a mesma topologia no espaço. Em dimensão infinita, a situação é muito diferente como se vê em cursos de análise funcional e como vamos ver em alguns exemplos mais específicos.

Um espaço vetorial normado possui uma estrutura natural de espaço métrico e, em particular, uma topologia natural. A saber, é possível definir uma distância $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(v, w) := \|v - w\|.$$

Por definição, um espaço normado é dito um espaço de Banach quando V, munido da distância acima, é um espaço métrico completo, isto é, quando toda sequência de Cauchy em V é convergente em V.

Um espaço com produto interno, por sua vez, é um espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que, por definição, satisfaz as propriedades abaixo.

(i) Bilinearidade: para quaisquer $v_1, v_2, w \in V$ e quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\langle c_1 v_1 + c_2 v_2, w \rangle = c_1 \langle v_1, w \rangle + c_2 \langle v_2, w \rangle$$

e analogamente para a segunda entrada (linearidade com respeito à segunda entrada segue, alternativamente, do item (ii) abaixo).

(ii) Simetria: para quaisquer $v_1, w \in V$, vale que $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.

(iii) Positividade e não-degenerescência: para qualquer $v \in V$, tem-se $\langle v, v \rangle \geq 0$; além disso, $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

Um espaço com produto interno é um caso especial de espaço normado, pois um produto interno nos permite introduzir a norma

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Por definição, se um espaço com produto interno V é um espaço métrico completo com a distância induzida pelo produto interno, nós dizemos que V é um espaço de Hilbert.

3.2 Preliminares em Espaços de Lebesgue

Vimos ser possível considerar funções localmente integráveis na noção de derivada fraca. Além disso, tanto a própria função quanto a sua derivada fraca podem ser alteradas em um conjunto de medida nula sem que o conceito seja alterado.

Em seguida, para a muitas das aplicações em EDPs, se pede algum tipo de regularidade adicional para as funções, já que $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, notação para dizer que u é localmente integrável, costuma ser uma hipótese de trabalho insuficiente.

Daí entram os Espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$, com $p \in [1, +\infty]$. Basicamente, a ideia é pedir integrabilidade da potência p da função u e usar esta quantidade como norma para o espaço.

Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$, definimos o espaço vetorial $V_p(\Omega)$ por

$$V_p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

e definimos uma (tentativa de) norma em $V_p(\Omega)$ por

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Acontece que isto não define uma norma porque pode acontecer de $\|u\|_p = 0$ sem a função u ser nula: por exemplo, toda função u diferente de zero em um conjunto de medida nula possui integral igual a zero. No entanto, todas as outras propriedades de norma valem e o que usualmente se faz é introduzir uma relação de equivalência, decretando que funções que coincidem em quase todo ponto sejam a mesma função: para $u, v \in V_p(\Omega)$,

$$u \sim v \iff u(x) = v(x) \text{ para quase todo ponto } x \in \Omega.$$

Esta relação de equivalência dá origem ao conjunto de classes de equivalência

$$L^p(\Omega) := \big\{ [u];\ u \in V_p(\Omega) \big\}, \text{ onde } [u] := \{v;\ v \sim u\}.$$

A norma

$$\|[u]\|_{L^p(\Omega)} := \|u\|_p$$

está bem definida, pois funções que coincidem qtp possuem a mesma integral e, logo, $L^p(\Omega)$ é um espaço normado com esta norma.

É tradicional e conveniente omitir o símbolo de classe de equivalência $[\cdot]$ ao tratar de elementos do conjunto $L^p(\Omega)$. E mais: pensamos que os elementos são funções, apesar de serem classes. Isso requer um pouco de prática para não causar confusão. Por exemplo, não faz sentido dizer que $u \in L^p(\Omega)$ é uma função contínua, porque mesmo que um representante da classe de equivalência fosse contínuo, poderíamos alterar o valor da função em alguns pontos sem sair da classe de equivalência. No entanto, quando dissermos que $u \in L^p(\Omega)$ é uma função contínua, isso deve ser interpretado como: existe um representando da classe que é contínuo. Outro ponto que pode parecer estranho é que não faz sentido considerar o valor de uma função $u \in L^p(\Omega)$ em um ponto (por ser um conjunto de medida nula).

Proposição 8. *O espaço vetorial normado $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\big)$ é um espaço de Banach.*

Um caso especial importante é o caso $p = 2$, pois neste caso a norma provem de um produto interno, tornando $\big(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}\big)$ um espaço de Hilbert: para $u, v \in L^2(\Omega)$,

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x) \,\mathrm{d}x.$$

descrever ainda a norma em L^∞

3.3 Definição

Começamos definindo o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. O índice um indica que vamos pedir derivadas fracas de ordem um e o índice $p \in [1, \infty]$ indica que tanto a função quanto suas derivadas estão em $L^p(\Omega)$.

Mais precisamente,

$$W^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega);\ u \text{ é fracamente diferenciável, } u \in L^p(\Omega) \text{ e } \nabla u \in \big[L^p(\Omega)\big]^d \Big\}.$$

Segue da definição que $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ é um subespaço vetorial, mas acontece que a norma $L^p(\Omega)$ não é suficiente para tornar $W^{1,p}(\Omega)$ um espaço de Banach, porque não leva em consideração as derivadas fracas de u. Assim, uma alternativa é fazer uma combinação das normas $L^p(\Omega)$ de u e de suas derivadas. Definimos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\partial_1 u(x)|^p \,\mathrm{d}x + \cdots + \int_\Omega |\partial_d u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

o que é o mesmo que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\partial_1 u\|^p_{L^p(\Omega)} + \cdots + \|\partial_d u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Observação 9. Existem muitas maneiras equivalentes de introduzir uma norma no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, que descrevemos aqui nesta observação. Uma outra possibilidade de definição seria

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

e note que esta é diferente da nossa, pois usualmente usamos a norma Euclidiana para vetores:

$$|\nabla u(x)| = \left(|\partial_1 u(x)|^2 + \cdots + |\partial_d u(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Nossa definição também é diferente de

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial_1 u\|_{L^p(\Omega)} + \cdots + \|\partial_d u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{ou} \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

que tambem gerariam normas equivalentes à nossa em $W^{1,p}(\Omega)$. Em realidade, poderíamos considerar a quantidade

$$\left(\|u\|_{L^p(\Omega)}, \|\partial_1 u\|_{L^p(\Omega)}, \ldots, \|\partial_d u\|_{L^p(\Omega)} \right)$$

como um vetor em $\mathbb{R}^{d+1}$ e qualquer norma de $\mathbb{R}^{d+1}$ (são todas equivalentes) pode ser utilizada para definir uma norma equivalente à nossa em $W^{1,p}(\Omega)$. Nossa definição pode ser obtida ao considerar a norma p em $\mathbb{R}^{d+1}$.

Proposição 10. *O espaço normado* $\left(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Suponhamos que $\{u_k\} \in W^{1,p}(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy. Logo, cada uma das sequências $u_k, \partial_1 u_k, \ldots, \partial_d u_k \in L^p(\Omega)$ é de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Sendo $L^p(\Omega)$ completo, existem os limites

$$u_k \longrightarrow u \in L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad \partial_j u_k \longrightarrow v_j \in L^p(\Omega),\ j \in \{1, 2, \ldots, d\}.$$

Para terminar a demonstração, basta provar que v_j é derivada fraca de u com respeito a j-ésima coordenada. Convergência em $L^p(\Omega)$, em particular, implica que[2]

$$\lim_{k \to +\infty} \int_\Omega u_k(x)\psi(x) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)\psi(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{para qualquer} \quad \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

[2]Isto é uma consequência da Desigualdade de Hölder: $\psi \in C_c^\infty(\Omega) \implies \psi \in L^q(\Omega)$, onde $q > 1$ é o expoente conjugado de $p > 1$, definido pela condição $p^{-1} + q^{-1} = 1$; temos

$$\left| \int_\Omega \big[u_k(x) - u(x)\big]\psi(x) \,\mathrm{d}x \right| \le \int_\Omega |u_k(x) - u(x)||\psi(x)| \,\mathrm{d}x \le \|\psi\|_{L^q(\Omega)} \|u_k - u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Desta maneira, convergência em $L^p(\Omega)$ implica na convergência que mencionamos acima.

Para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, aplicamos esta ideia duas vezes, uma com $\psi = \partial_j \varphi$ e outra com $\psi = \varphi$, para obter

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{k\to+\infty}\int_\Omega u_k(x)\partial_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega \partial_j u_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_\Omega v_j(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Segue que u é fracamente diferenciável com relação a j-ésima coordenada, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, e que $v_j = \partial_j u \in L^p(\Omega)$ é a respectiva derivada fraca. Portanto, função u que construimos pertence a $W^{1,p}(\Omega)$ e satisfaz

$$\lim_{k\to+\infty}\|u_k - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0.$$

□

Exemplo 11. Generalizando exemplo que vimos anteriormente, podemos verificar que $u : B_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) := |x|^{-\alpha}, x \neq 0.$$

é fracamente diferenciável em B_1, desde que $\alpha \in [0, 1)$ e com derivada fraca

$$\nabla u(x) = -\frac{\alpha x}{|x|^{\alpha+2}}, x \neq 0.$$

Além disso,

$$|\nabla u(x)| = \frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}} \in L^p(B_1) \iff \alpha \in (0, \tfrac{d-p}{p}),$$

onde o limite superior do intervalo foi obtido de modo a ter $(\alpha + 1)p < d$. Segue que $u \in W^{1,p}(B_1)$ desde que $\alpha \in (0, \frac{d-p}{p})$.

Exemplo 12. Evans nos diz que deste exemplo que, embora o fato de uma função pertencer a um Espaço de Sobolev garante certas propriedades de regularidade, ainda assim pode ser uma função bastante mal comportada. Vamos construir, baseados no exemplo anterior, uma função $u \in W^{1,p}(B_1)$ com a seguinte propriedade: dado qualquer aberto $A \subseteq B_1$, tem-se que u não é limitada em A.

Além do mais, a construção é simples: considere um conjunto denso $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_1$, por exemplo, pontos com coordenadas racionais. Para $\alpha \in (0, \dfrac{d-p}{p})$, definimos

$$u(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}|x - r_k|^{-\alpha},\ x \in B_1 \setminus \{r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots\}.$$

A Desigualdade Triangular e o exemplo anterior garantem que $u \in W^{1,p}(B_1)$, como havíamos afirmado.

3.3.1 Caso especial $p = 2$; Espaço de Hilbert

O Espaço $W^{1,2}(\Omega)$ é um caso especial muito importante, pois é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Muitas vezes, aparece a notação especial $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, omitindo o valor $p = 2$, para este caso especial do Espaço de Sobolev. Observe que o produto interno é dado pelo produto em $L^2(\Omega)$, para cada derivada:

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} := \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle\nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Este é dos mais importantes para aplicações em EDPs.

3.4 Sobolev de ordem mais alta

De maneira totalmente análoga, definimos

$$W^{k,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega);\ u \text{ é } k \text{ vezes fracamente diferenciável e } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq k \Big\}$$

com a norma associada

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

que o torna um Espaço de Banach, como pode ser verificado da mesma maneira que fizemos para $k = 1$. Além disso, o caso $p = 2$, também denotado $H_k(\Omega)$ é um Espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, \mathrm{d}x.$$

3.5 Propriedades de derivadas fracas

Muitas propriedades continuam válidas tais quais às das derivadas fracas; no entanto, a verificação destas propriedades deve ser feita com cuidado.

Proposição 13. *Vale:*

(i) *Derivadas comutam:* $D^\alpha D^\beta u = D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$.

(ii) *Linearidade:* $D^\alpha(c_1 u + c_2 v) = c_1 D^\alpha u + c_2 D^\alpha v$.

(iii) *Restrição:* $u \in W^{k,p}(\Omega), U \subset \Omega \implies u \in W^{k,p}(U)$.

(iv) *Regra do Produto: se* $u, v \in W^1(\Omega)$ *são tais que* $uv \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *e* $u\nabla v + v\nabla u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *então*

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v.$$

Mais geralmente, se $u, v \in W^k(\Omega)$ *e ambos os termos abaixo estão em* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *então*

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta v D^\alpha u.$$

(v) *Regra da Cadeia: se* $f \in C^1(\mathbb{R})$ $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *e* $u \in W^1(\Omega)$, *então* $f \circ u \in W^1(\Omega)$ *e temos*

$$\nabla(f \circ u) = (f' \circ u)\nabla u.$$

(vi) *Partes positiva e negativa: se* $u \in W^1(\Omega)$ *e denotamos*

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \min\{u(x), 0\},$$

então $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$ *e tem-se*

$$u = u^+ - u^- \quad \textit{e} \quad |u| = u^+ + u^-,$$

$$\nabla(u^+) = \chi_{\{u>0\}} \nabla u = \begin{cases} \nabla u, & \textit{se } u > 0 \\ 0, & \textit{se } u \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla(u^-) = \chi_{\{u<0\}} \nabla u = \begin{cases} \nabla u, & \textit{se } u < 0 \\ 0, & \textit{se } u \geq 0 \end{cases}$$

$$\nabla(|u|) = \chi_{\{u>0\}} \nabla u = \begin{cases} \nabla u, & \textit{se } u > 0 \\ 0, & \textit{se } u = 0 \\ -\nabla u, & \textit{se } u < 0 \end{cases}$$

A demonstração de cada uma dessas propriedades pode conter algumas sutilezas. É interessante enunciar assim todas juntas para conveniência de referêcia, mas para analisar a prova, seria mais conveniente tratar cada item como proposições diferentes.

Demonstração do item (i). Este item não apresenta dificuldades, apenas aplicação cuidadosa da definição de derivada fraca. Sendo as funções teste infinitamente diferenciáveis, podemos "passar" um número arbitrário de derivadas através da definição; mais precisamente, para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, utilizamos $D^\beta \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ como função teste para escrever

$$\int_\Omega D^\alpha u(x) D^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^{\alpha+\beta}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Agora, a definição da derivada fraca $D^{\alpha+\beta}u$ é

$$\int_\Omega u(x) D^{\alpha+\beta}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_\Omega D^{\alpha+\beta}u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Juntando estas duas, obtemos

$$\int_\Omega D^\alpha u(x) D^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^{\alpha+\beta}u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Segue da definição de derivada fraca que $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta}u$. □

Demonstração dos itens (ii) *e* (iii). Estas demonstrações também seguem de aplicação direta das definições de derivada fraca. A escrita fica como exercício. □

Demonstração dos itens (iv). Este é um dos itens que deve ser analisado cuidadosamente. O caso geral pode ser obtido por aproximação de funções de Sobolev, que vamos estudar em breve. Provamos aqui o caso em que $v \in C^\infty(\Omega)$, ficando o caso geral como exercício (a ser feito depois de provarmos os teoremas de aproximação). Neste caso especial em que uma das funções é suave, para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, vale que $v\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e temos a Regra do Produto usual

$$\nabla(v\varphi) = v\nabla\varphi + \varphi\nabla v.$$

Logo,

$$\int_\Omega u(x)v(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)\Big(\nabla(v\varphi)(x) - \varphi(x)\nabla v(x)\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Sendo $v\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, podemos utilizar como função teste no primeiro termo do lado direito da igualdade acima e obter

$$\int_\Omega u(x)v(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Big(v(x)\nabla u(x) + u(x)\nabla v(x)\Big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Segue a primeira afirmação do item. □

4 Aproximações suaves e extensão de funções de Sobolev

Nesta seção, estudamos aproximações suaves para funções de Sobolev, algumas aplicações disto e, em seguida, analisamos o problem de estenter para todo $\mathbb{R}^d$ uma função de Sobolev inicialmente definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Começamos apresentando os conceitos básicos de molificadores e aproximações da identidade.

4.1 Preliminares sobre molificadores

Dada uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, possivelmente não regular, a ideia aqui é utilizar convolução para "suavizar" u. Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos a convolução $f * g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

A segunda igualdade é uma consequência direta da fórmula de mudança de variáveis e, em particular, implica que a convolução é uma operação comutativa.

Considere a função $\rho : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x) := \begin{cases} c \cdot \exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right), & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e que $\operatorname{spt} \rho \subseteq \overline{B_1(0)}$. Além disso, introduzimos, para cada $\varepsilon > 0$, as funções $\rho : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(\varepsilon^{-1}x).$$

desenho em $d = 1$ e $d = 2$

Dada uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e dado $\varepsilon > 0$, denotamos $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ e definimos o molificador de u como sendo a função $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u_\varepsilon(x) := (\rho_\varepsilon * u)(x) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(y)u(x-y)\,\mathrm{d}y$$

Note que, quando o domínio não é o espaço inteiro, devemos tomar cuidado ao integrar pela fórmula de mudança de variáveis.

Teorema 14. *Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, valem as propriedades abaixo.*

(i) *Para cada $\varepsilon > 0$, temos que $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ e, para cada multi-índice, $D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha \rho_\varepsilon) * u$.*

(ii) *Vale convergência pontual: $u_\varepsilon(x) \longrightarrow u(x)$, para quase todo ponto $x \in \Omega$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

(iii) *Se $u \in C(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ é compacto, então $u_\varepsilon \longrightarrow u$ uniformemente em K, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

(iv) *Para $p \in [1, +infty)$ e $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, temos que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

Demonstração. (i) Para cada $x \in \Omega_\varepsilon$, note que a (primeira) integral que define u_ε pode ser considerada no conjunto $\overline{B_\varepsilon(x)}$ já que basta integrar no suporte de ρ_ε. Para cada $v \in \mathbb{R}^n$, consideramos $t \in \mathbb{R}$ pequeno o suficiente de maneira que $x + tv \in \Omega_\varepsilon$. Logo,

$$\frac{u_\varepsilon(x+tv) - u_\varepsilon(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int_{B_\varepsilon(x+tv)} \rho_\varepsilon(x+tv-y)u(y)\,\mathrm{d}y - \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

Observamos que $K := \overline{B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(x+tv)} \subset \Omega$ é subconjunto compacto e que ρ_ε se anula fora das bolas nas respectivas integrais, temos

$$\frac{u_\varepsilon(x+tv) - u_\varepsilon(x)}{t} = \int_\Omega \frac{\rho_\varepsilon(x-y+tv) - \rho_\varepsilon(x-y)}{t} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

No compacto K, utilizando que ρ_ε é suave, obtemos a convergência uniforme

$$\frac{\rho_\varepsilon(x-y+tv) - \rho_\varepsilon(x-y)}{t} \longrightarrow \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial v}(x-y) \quad \text{quando} \quad t \to 0.$$

Concluimos então que u_ε é difernciável na direção v com derivada parcial

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial v}(x) = \int_\Omega \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial v}(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial v} * u\right)(x).$$

Como existem todas as derivadas parciais e, como pode ser verificado, são contínuas, segue que u_ε é diferenciável. As derivadas de ordem mais alta seguem de maneira totalmente análoga.

(ii) Vamos mostrar que a convergência vale para todo ponto de Lebesgue de u. Lembre que $x \in \Omega$ é um ponto de Lebesgue para u quando

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\,\mathrm{d}y = 0.$$

O Teorema da Diferenciação de Lebesgue nos diz que quase todo ponto $x \in \Omega$ é d Lebesgue e, portanto, nosso item fica provado. Usando que $|\rho(x)| \le c$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e que $|B_r(x)| = \omega_d \varepsilon^d$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\big|u_\varepsilon(x) - u(x)\big| &= \left|\varepsilon^{-d} \int_{B_\varepsilon(x)} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\big(u(y) - u(x)\big)\,\mathrm{d}y\right| \\
&\le c \cdot \omega_d \fint_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - u(x)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

donde nossa convergência segue.

(iii) Para $u \in C(\Omega)$, a prova do item anterior fornece convergência uniforme em compactos.

(iv) Finalmente, resta mostrar convergência em $L^p(K)$, para $p \in [1, +\infty)$ e $K \subset \Omega$ compacto. Começamos justificando que, se $V \subset\subset W \subset\subset K$, temos

$$\|f\|_{L^p(V)} \le \|u\|_{L^p(W)}.$$

Estimamos, a partir da Desigualdade de Hölder com expoente p:

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x)| &= \left|\int_{B_r(x)} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y\right| \\
&\le \int_{B_r(x)} \rho_\varepsilon(x-y)^{1-\frac{1}{p}} \rho_\varepsilon(x-y)^{\frac{1}{p}} |u(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\le \left(\int_{B_r(x)} \rho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B_r(x)} \rho_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{B_r(x)} \rho_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Note que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $B_\varepsilon(x) \subset W$. Logo, elevando ambos os lados na p e integrando para $x \in V$, obtemos que

$$\int_V |u_\varepsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x \le \int_V \int_{B_r(x)} \rho_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le \int_V \int_W \rho_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Agora, usando o Teorema de Fubini, temos, conforme afirmado,

$$\int_V |u_\varepsilon(x)|^p\,\mathrm{d}x \le \int_W |u(y)|^p \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_W |u(y)|^p\,\mathrm{d}y.$$

Para concluir o item, vamos utilizar que o conjunto das funções contínuas de suporte compacto é denso em $L^p(\Omega)$. Assim, dado $\delta > 0$, podemos considerar $v \in C^0(W)$ tal que

$$\|u - v\|_{L^p(W)} < \delta.$$

Logo, o resultado segue da Desigualdade Triangular:

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(V)} &\le \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(V)} + \|v - u\|_{L^p(V)} \\ &\le 2\|v - u\|_{L^p(W)} + \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(V)} \\ &< 2\delta + \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(V)}.\end{aligned}$$

Sendo v contínua, temos convergência uniforme em $V \subset\subset \Omega$. Portanto,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(V)} \le 2\delta$$

e, sendo $\delta > 0$ arbitrário, segue o resultado. $\square$

4.2 Aproximação local de funções de Sobolev

Uma ideia grosseira que pode ser inferida das propriedades que provamos na seção anterior é que a aproximação obtida pelos molificadores vale localmente na topologia natural do espaço em que a função está. Desta maneira, para funções $L^p(\Omega)$, obtemos convergência em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$; para funções contínuas, convergência localmente uniforme. Vejamos que a mesma construção funciona para funções de Sobolev, com os mesmos molificadores.

Iniciamos mostrando que a derivada de ordem α de u_ε é a molificação da derivada fraca $D^\alpha u$ de u. Este é o passo principal do primeiro teorema de aproximação (local) que mostramos abaixo.

Lema 15. *Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que, para $\alpha \in \mathbb{N}^d$, existe a derivada fraca $D^\alpha u$. Então, para $x \in \Omega_\varepsilon$,*

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = \big(\rho_\varepsilon * D^\alpha u\big)(x).$$

Observamos que, sendo $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, a derivada do lado esquerdo é a usual em $x \in \Omega_\varepsilon$ enquanto a convolução do lado direito é feita usando a derivada fraca de u.

Demonstração. Denotamos temporariamente D^α_z a derivada com respeito à variável z. Assim, temos

$$\begin{aligned}D^\alpha u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega D^\alpha_x \rho_\varepsilon(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha_y \rho_\varepsilon(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{2|\alpha|} \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \big(\rho_\varepsilon * D^\alpha u\big)(x).\end{aligned}$$

Na passagem da linha dois para a linha três, utilizamos a definição de derivada fraca de u com função teste $\varphi(y) = \eta_\varepsilon(x-y)$; note que, para cada $x \in \Omega_\varepsilon$ fixado, $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$. $\square$

Passamos à análise do teorema de aproximação local mencionado acima.

Teorema 16. *Suponhamos que $p \in [1, +\infty)$ e que $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Então, a molificação $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ de u converge para u em $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0$. Em outras palavras,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(K)} = 0 \quad \textit{para qualquer} \quad K \subset\subset \Omega.$$

Demonstração. É uma combinação do lema acima com o Teorema 14, item (iv). Pelo lema, as derivadas usuais de u_ε são a molificação das derivadas fracas de u; estas, por sua vez, convergem em $L^p(\text{loc})(\Omega)$. Assim, fixado $K \subset\subset \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(K)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \big\|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\big\|^p_{L^p(K)}\right)^{1/p} = 0. \qquad \square$$

Este teorema pode ser usado na verificação da Regra da Cadeia que enunciamos em aula e também para provar a Regra de Leibniz para derivadas fracas.

4.3 Aproximação global; sem suavidade de $\partial\Omega$

A ideia para obter aproximações globais é usar partições da unidade para passar do local, que fizemos na seção anterior, para o global.

Teorema 17. *Para $p \in [1, +\infty)$, suponhamos que $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Então, existe $u_k \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, de maneira que*

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Em outras palavras, $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$. Ou ainda, equivalentemente, $W^{k,p}(\Omega)$ pode ser caracterizado como o fecho $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ com a respectiva norma de Sobolev.

Demonstração. Vamos provar densidade. Para $i \in \mathbb{N}$, consideramos subconjuntos $\Omega_i \subset \Omega$ tais que

$$\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1} \quad \text{e} \quad \Omega = \cup_i \Omega_i.$$

Consideramos uma partição da unidade $\xi_i \in C_c^\infty(\Omega)$ subordinada aos abertos $A_i := \Omega_{i+3} \setminus \Omega_{i+1}$. Assim, temos $0 \le \xi_i \le 1$, $\operatorname{spt} \xi_i \subseteq A_i$ e

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \xi_i(x) = 1 \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Observamos ainda que, pela Regra de Leibniz, $\xi_i u \in W^{k,p}(\Omega)$. Além disso, $\operatorname{spt}(\xi_i u) \subseteq A_i$.

A prova termina ao considerar molificações de $\xi_i u$. Para isso, precisamos de um pouco mais de “espaço” e definimos $B_i := \Omega_{i+4} \setminus \Omega_i$. Em seguida, escolhemos $\varepsilon_i > 0$ tal que $\operatorname{spt}(\xi_i u)_{\varepsilon_i} \subseteq W_i$ e

$$\|(\xi_i u)_{\varepsilon_i} - \xi_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \frac{\delta}{2^i},$$

onde $\delta > 0$ é um número arbitrário. Observe que, fixado $\Omega' \subset\subset \Omega$, a soma

$$v := \sum_{i=0}^{+\infty} (\xi_i u)_{\varepsilon_i}$$

possui somente um número finito de termos não nulos. Além disso, nossa construção implica

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \le \sum_{i=0}^{+\infty} \|(\xi_i u)_{\varepsilon_i} - \xi_i u\|_{W^{k,p}(\Omega')} < \delta. \qquad \square$$

4.4 Aproximação global por funções $C^\infty(\overline{\Omega})$; hipótese $\partial\Omega \in C^1$

Ideia: planificar a fronteira.

4.5 Extensão

Conforme vimos em alguns exemplos, os saltos de uma função podem fazer com que não exista a derivada fraca da função. Assim, em contraste com funções $u \in L^p(\Omega)$, nem sempre possível estender uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ como sendo zero fora de Ω mantendo a função em $W^{1,p}(\Omega)$. Intuitivamente, a derivada pode conter partes singulares, representada por medidas.

Estes teoremas são importantes na melhoria dos resultaods de imersão que vamos provar para espaços de Sobolev e na prova de interpolações para normas de Sobolev (GT pp169).

5 Traço

6 Desigualdades funcionais

7 Imersões compactas

Referências