

# Lista 2 – Prof. Diego Marcon

Análise Matemática C

12 de junho de 2023

Lista de exercícios sobre:

- Funções convexas;
- Teorema da Função Inversa;
- Teorema da Função Implícita;
- Formas canônicas locais;
- Teorema do Posto.

Alguns problemas desta lista foram retirados de listas anteriores do Prof. Eduardo Brietzke.

**Exercício 1.** Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo aberto. Mostre que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se, e somente se, para quaisquer  $a < x < b$  contidos em  $I$ , temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \quad (1)$$

Além disso:

- Interprete (1) geometricamente.
- Utilize (1) para provar diretamente que  $f$  é uma função localmente de Lipschitz em  $I$ .

**Exercício 2.** Seja  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo. Mostre que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \text{dist}(x, U)$$

é uma função convexa.

**Exercício 3.** Mostre que todo ponto de mínimo local de uma função convexa é ponto de mínimo global. Além disso, mostre que o conjunto dos pontos de mínimo é convexo.

**Exercício 4.** Mostre que os pontos críticos de uma função convexa são pontos de mínimo globais.

**Exercício 5 (Desigualdade de Jensen - versão discreta).** Prove que uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é convexa se, e somente se, para quaisquer  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$  com  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$ , temos

$$f[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m] \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_m f(x_m).$$

**Exercício 6 (Desigualdade de Jensen - versão contínua em dimensão 1).** Sejam  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Prove que

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(g(x)) dx.$$

Obs. Lembre que se  $g$  é integrável e  $f$  é contínua, então  $f \circ g$  é integrável, mas a composta de funções integráveis pode não ser integrável.

**Exercício 7.** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em um conjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto e convexo.

(i) Mostre que  $f$  é convexa se, e somente se,

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

(ii) Uma função  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita **monótona** quando  $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0$ , para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que, em dimensão 1, a condição (2) é equivalente a ser  $f'$  crescente.

**Exercício 8.** Seja  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto convexo. Prove as afirmações abaixo.

(i) Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções convexas, então também é convexa

$$h(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$

(ii) O supremo pontual de uma família qualquer de funções convexas  $f_\lambda : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , indexadas por índices  $\lambda \in \Lambda$  e que possivelmente assumem valor  $+\infty$  em algum ponto, é também uma função convexa, isto é,

$$f(x) := \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$$

é uma função convexa, que possivelmente assume valor  $+\infty$ .

**Exercício 9.** Determine quais funções são convexas e/ou côncavas, provando suas afirmações.

(i)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z^2$ .

(ii)  $f(x, y, z) = x - y^2 - z^2$ .

(iii)  $f(x, y) = (x + y + 1)^p$ .

(iv)  $f(x, y, z) = \exp(x^2 + xy + y^2 + z^2)$ .

**Exercício 10.** Mostre que as funções abaixo são convexas em  $\mathbb{R}^n$ .

(i)  $f(x) = |x|^p$ , para  $p \geq 1$  real.

(ii)  $f(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{p}{2}}$ , para  $p \geq 1$  real.

(iii)  $f(x) = (1 + \langle x, x \rangle)^{\langle x, x \rangle}$ .

**Exercício 11.** Prove a seguinte generalização da desigualdade entre a média aritmética e geométrica

$$(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n})^{1/(p_1 + \dots + p_n)} \leq \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}, \quad \text{para quaisquer } a_i, p_i > 0.$$

*Dica:* Escrever  $x^k = e^{k \log x}$  e usar a convexidade da função exponencial.

**Exercício 12.** Pode-se provar que o conjunto dos pontos onde uma função convexa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  não é diferenciável tem medida nula<sup>1</sup> em  $\mathbb{R}^n$  e, neste sentido, se diz que funções convexas são diferenciáveis “em quase todo ponto”. O objetivo deste exercício é, por outro lado, construir uma função convexa em um intervalo da reta que não é diferenciável em nenhum número racional.

(i) Dada função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e não decrescente, definimos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = A + \int_a^x g(t) dt.$$

Prove que  $f$  é convexa.

<sup>1</sup>O significado desta expressão “medida nula” será visto em breve no nosso curso quando falarmos em integração em  $\mathbb{R}^n$ . É uma generalização direta do mesmo conceito estudado em análise na reta.

- (ii) No item anterior, mostre que se  $x_0$  é um ponto de descontinuidade de  $g$ , então  $f$  não é diferenciável em  $x_0$ . Mostre, no entanto, que existem os limites laterais e vale

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$$

- (iii) Construa uma função não decrescente em um intervalo, que seja descontínua em qualquer número racional.

Dica: Seja  $\{r_n\}$  uma enumeração do conjunto  $[a, b] \cap \mathbb{Q}$  que contem cada racional de  $[a, b]$  uma, e apenas uma, vez. Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

uma série convergente de termos positivos. Para cada  $x \in [a, b]$ , defina  $g(x)$  como sendo a soma dos  $a_n$  para todos os  $n$  tais que  $r_n \leq x$  (a soma da família vazia é zero, por definição). Uma maneira interessante de escrever a função  $g$  é através da função  $u$  de Heaviside:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u(x - r_n) \quad \text{onde} \quad u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0 \end{cases}.$$

Mostre que  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é crescente, descontínua nos racionais e contínua nos irracionais.

- (iv) Construa uma função convexa em um intervalo e não diferenciável nos números racionais.

**Exercício 13.** Quando uma função não é diferenciável, um conceito que pode substituir o de diferenciabilidade é o de subdiferenciabilidade (ou superdiferenciabilidade). Dada uma função convexa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ , o **subdiferencial** de  $f$  no ponto  $x$  é o conjunto  $\partial f(x)$  dos pontos  $p \in \mathbb{R}^n$  tais que

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^n.$$

A desigualdade acima pode ser interpretada geometricamente como:  $p$  define um plano que está todo abaixo do gráfico de  $f$  e que toca no gráfico de  $f$  para  $y = x$ .

- (i) Mostre que, dados  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  convexos, fechados e disjuntos, com um deles compacto, existe  $w \in \mathbb{R}^n$  e  $a > 0$  tais que

$$\langle w, x - y \rangle \geq a \quad \text{para todo } x \in A \quad \text{e todo } y \in B.$$

Dica: Definir  $W := A - B = \{a - b; a \in A, b \in B\}$ . Com as nossas hipóteses, mostre que  $W$  é fechado, convexo e que  $0 \notin W$ . Sendo fechado, minimizar  $|x|^2$  em  $W$ , obtendo um minimizante  $w \neq 0$  em  $W$ . Sendo convexo,  $(1 - t)w + t(x - y) \in W$ .

- (ii) Mostre que, se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa, então  $\partial f(x_0) \neq \emptyset$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Dica: Considerar  $A = \{(x, y); y \geq f(x)\}$  o epigráfico de  $f$  e  $B_k = \{(x_0, f(x_0) - 1/k)\}$ .

- (iii) Mostre que  $f$  é diferenciável em  $x_0$  se, e somente se,  $\partial f(x_0)$  consiste de um ponto só. Neste último caso, deve ser  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .

**Exercício 14.** Dada uma função convexa própria  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , definimos a sua **função convexa conjugada**  $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  como

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)).$$

- (i) Mostre que  $f^*$  é de fato convexa;

(ii) Trivialmente, vale a chamada **desigualdade de Young**:

$$\langle x, y \rangle \leq f(x) + f^*(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

O nome da desigualdade é motivado por um caso particular mais famoso: prove que

$$f(x) = \frac{|x|^p}{p} \quad \text{com } p > 1 \implies f^*(y) = \frac{|y|^q}{q} \quad \text{com } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

para escrever a desigualdade de Young mais usual:

$$\langle x, y \rangle \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

**Exercício 15.** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função convexa própria e semicontínua inferiormente. Então, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

(i)  $\langle x, y \rangle = f(x) + f^*(y)$ .

(ii)  $y \in \partial f(x)$ .

(iii)  $x \in \partial f^*(y)$ .

**Exercício 16.** Para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função própria, são equivalentes:

(i)  $f$  é convexa e semicontínua inferiormente.

(ii)  $f = g^*$  para alguma função própria  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iii)  $f^{**} = f$ .

**Exercício 17.** Seja  $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  e seja  $\varphi : U \rightarrow V$  um difeomorfismo, também de classe  $C^2$ , com  $\varphi(a) = b$ . Mostre que o posto da Hessiana de  $f$  em  $b$  é igual ao posto da Hessiana de  $f \circ \varphi$  no ponto  $a$ .

**Exercício 18.** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  tal que  $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  é uma isometria, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , isto é:

$$\langle f'(x) \cdot h, f'(x) \cdot k \rangle = \langle h, k \rangle \quad \text{para todos } x, h, k \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que  $f$  é uma isometria:

$$|f(y) - f(x)| = |y - x| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Conclua que

$$f(x) = T(x) + y_0,$$

onde  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  é uma transformação linear ortogonal.

**Exercício 19.** Considere  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F(x, y) = (x^3, y^3)$ . Mostre que  $F'(0, 0) = 0$  e que existe a função inversa  $F^{-1}$ . Qual a conclusão sobre a diferenciabilidade de  $F^{-1}$  na origem?

**Exercício 20.** Mostre que se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ , então  $f$  não é injetiva.

**Exercício 21.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x/2 + x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Explique por que este exemplo mostra que não basta ser  $f$  diferenciável no Teorema da Função Inversa.

**Exercício 22.** Discuta a aplicação do Teorema da Função Inversa para a aplicação

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

**Exercício 23.** Mostre que o sistema

$$\begin{cases} e^x + e^{2y} + e^{3u} + e^{4v} = 4 \\ e^x + e^y + e^u + e^v = 4 \end{cases}$$

tem solução para  $(u, v)$  em termos de  $(x, y)$  em torno do ponto  $(0, 0, 0, 0)$ . Determine as derivadas parciais de primeira ordem  $u_x(0, 0)$ ,  $u_y(0, 0)$ ,  $v_x(0, 0)$  e  $v_y(0, 0)$ .

**Exercício 24.** Sejam  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  e seja  $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$  tal que

$$\det \begin{bmatrix} f_{x_2}(p) & f_{x_3}(p) \\ g_{x_2}(p) & g_{x_3}(p) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F(x_1, x_2, x_3) = (f(x_1, x_2, x_3), g(x_1, x_2, x_3))$ . Prove que  $F(p)$  é ponto interior de  $F(\mathbb{R}^3)$ .

*Dica:* Use a mesma ideia da prova do Teorema da Função Implícita que demos em aula.

**Exercício 25 (Generalização do anterior).** Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  tais que, para todo  $x \in \Omega$ ,  $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  é sobrejetiva. Prove que a imagem  $f(\Omega)$  de  $f$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^m$ .

**Exercício 26.** Considere as equações

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(x, y) = 0$$

para funções  $f$  e  $\phi$  de classe  $C^1$ . Se

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0,$$

mostre que estas equações definem localmente  $z$  como função de  $x$ . Além disso,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\phi_x f_y - \phi_y f_x}{\phi_y f_z}.$$

**Exercício 27.** Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um aberto e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Seja  $(a, b) \in \Omega$  e  $c = u(a, b)$ . Suponhamos que  $u_x(a, b) \neq 0$ . Mostre que localmente é possível usar a equação  $u = u(x, y)$  para obter  $x = x(u, y)$ . Mais precisamente, existem intervalos abertos  $U$ ,  $V$  e  $W$ , com  $a \in U$ ,  $b \in V$  e  $c \in W$  e existe  $\varphi : W \times V \rightarrow U$  de classe  $C^1$  tal que  $\varphi(c, b) = a$  e  $u(\varphi(z, y), y) = z$ , para todo  $(z, y) \in W \times V$ . Prove ainda que  $\varphi(u(x, y), y) = x$ .

**Exercício 28.** O objetivo deste exercício é verificar que raízes simples de polinômios dependem diferenciavelmente (na verdade, em classe  $C^\infty$ ) dos coeficientes do polinômio.

Para cada  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ , indique um polinômio complexo por

$$p_a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Seja  $z_0 \in \mathbb{C}$  uma raiz simples de  $p_a$ . Mostre que existem vizinhanças  $U$  e  $V$ , de  $a$  e de  $z_0$ , respectivamente, tais que

$$b \in U \implies \text{existe única raiz (simples) } z = z(b) \text{ de } p_b.$$

Além disso, a aplicação  $b \mapsto z(b)$  é de classe  $C^\infty$ .

**Exercício 29.** Dadas duas funções  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , considere a equação diferencial parcial  $u_y + a(u)u_x = 0$  com condição inicial  $u(x, 0) = h(x)$ . Mostre que, localmente numa vizinhança de cada  $(x, 0)$ , existe uma solução  $u = u(x, y)$  definida implicitamente por  $u = h(x - a(u)y)$ .

**Exercício 30.** Seja  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$ . Se  $f'(a)$  tem posto  $p$ , então prove que existe um mergulho  $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow U$  de classe  $C^\infty$  tal que  $f \circ \varphi$  é um mergulho.