Lista 1 – Prof. Diego Marcon

Análise Matemática C

Esta lista possui exercícios de revisão de Análise Matemática B, pré-requisito do nosso curso, para fixar notação e para conveniência dos alunos. Outros, referentes ao início do nosso curso. Contempla:

- Definição de derivada de funções escalares e vetoriais;
- Regra da cadeia;
- Identidade e desigualdade do valor médio;
- Derivada segunda;
- Fórmula de Taylor;
- Problemas de otimização, pontos críticos;

Alguns problemas desta lista foram retirados de listas anteriores do Prof. Eduardo Brietzke.

Exercício 1. Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e seja $x \in U$. Suponhamos que existam transformações lineares $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ tais que, para todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $x + h \in U$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - S(h)|}{|h|} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{|h|}.$$

Mostre que $S = T$. Em particular, este exercício prova que a derivada de uma função diferenciável em um ponto $x \in U$ é única e está bem definida como a transformação linear $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ que satisfaz a propriedade acima.

Exercício 2. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Prove que são equivalentes:

(i) $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$;

(ii) as funções coordenadas $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ possuem derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ todas contínuas;

(iii) para $x \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$, existem as derivadas direcionais $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$ e, além disso, para cada $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial f}{\partial v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é uma função contínua.

Exercício 3 (Lima, Curso de Análise vol.2). Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto convexo e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em U. Considere as seguintes cinco afirmações:

(a) $|f'(x)| \leq C$ para todo $x \in U$;

(b) $|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$ para todos $x, y \in U$;

(c) f é uniformemente contínua;

(d) para todo $a \in \bar{U}$, existe $\lim_{x\to a} f(x)$;

(e) se U é limitado, então $f(U)$ é limitado.

Mostre que $(a) \iff (b) \implies (c) \implies (d) \implies (e)$ e que as demais são falsas.

Exercício 4. Resolva os itens abaixo.

(i) Seja $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ a função cuja lei é $u(x) = |x|^2/2$. Prove que u é diferenciável e que

$$\mathrm{d}u(x) = x^t \quad \text{e} \quad \nabla u(x) = x.$$

A notação x^t acima significa o seguinte: para cada $x \in \mathbb{R}^d$ fixado, $x^t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ é o funcional linear dado por

$$x^t(v) = \langle v, x\rangle.$$

(ii) Para $b \in \mathbb{R}^d$ fixado, considere o funcional linear $v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $v(x) = x \cdot b$. Prove que v é diferenciável e satisfaz, para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{d}v(x) = b^t \quad \text{e} \quad \nabla v(x) = b.$$

(iii) Mostre que a função $w : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $w(x) = |x|$, é diferenciável para todo $x \neq 0$ e tem-se

$$\mathrm{d}w(x) = \frac{x^t}{|x|} \quad \text{e} \quad \nabla w(x) = \frac{x}{|x|}.$$

(iv) Prove que, fixado um real $\alpha \geq 2$, a função $z : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $z(x) = |x|^\alpha$, é diferenciável e

$$\mathrm{d}z(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}x^t \quad \text{e} \quad \nabla z(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}x.$$

Para $\alpha < 2$, a função z é diferenciável em todo $x \neq 0$ e vale a mesma fórmula.

Dica: Usar a Regra da Cadeia e o item anterior.

Exercício 5. Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$T'(x) = T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Este exercício justifica a afirmação trivial de que, sendo $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, a melhor aproximação afim para T em torno de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é obtida a partir da própria transformação T, que já é linear.

Dica: Não há o que provar pois o resto, sendo identicamente nulo, trivialmente vai para zero. O caso especial de funcionais lineares é considerado no exercício anterior.

Exercício 6. Se $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação bilinear (linear em cada uma de suas variáveis $x, y \in \mathbb{R}^n$), mostre que $B'(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é a transformação linear dada por:

$$B'(x, y) \cdot (h, k) = B(h, y) + B(x, k).$$

Em seguida, encontre (e prove a validade de) uma expressão para a derivada de uma aplicação k-linear

$$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Exercício 7. Mostre que se $f : U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em um conjunto aberto conexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{d}f(x) = 0 \in (\mathbb{R}^n)^*$ para todo $x \in U$, então f é constante em U.

Exercício 8. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ pode ser identificado com o plano $\mathbb{R}^2$, o que fornece uma estrutura de corpo para $\mathbb{R}^2$. Isso porque todo número complexo não nulo possui inverso:

$$z = x + yi \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

É possível, então, definir a derivada de uma função complexa (de valores complexos) assim como se faz para funções escalares: para $a \in \mathbb{C}$, definimos

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \in \mathbb{C}, \qquad \text{(aqui } h \in \mathbb{C}\text{)} \tag{1}$$

quando tal limite existe. Esta definição, embora esteja relacionada, **não coincide** com a definição de derivada como transformação linear, conforme passamos a analisar.

(i) Utilizando as devidas identificações, denotamos $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$. Mostre que, se o limite em (1) existir, então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Estas identidades são conhecidas como as **equações de Cauchy-Riemann**.

Dica: Considerar o limite (1) em duas situações: $h = t \in \mathbb{R}$ e $h = it$, para $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Mostre que a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \Phi(\mathbb{C}) \subsetneq M(2\times 2) \\ & x + iy & \longmapsto & \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \end{array}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

(iii) Mostre que se f é diferenciável em a no "sentido complexo", isto é, no sentido de existir o limite (1), então f é diferenciável no sentido da nossa definição de aula. Além disso, neste caso, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, como transformação linear, tem a matriz canônica associada igual a

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(a) \\[2ex] -\dfrac{\partial u}{\partial y}(a) & \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) \end{bmatrix}.$$

Explique que esta conclusão está coerente com o item (ii) e que se pode considerar $f'(a) \in \mathbb{C}$.

Exercício 9. Para $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ curvas diferenciáveis, mostre a regra do produto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\langle \alpha(t), \beta(t)\big\rangle = \big\langle \alpha'(t), \beta(t)\big\rangle + \big\langle \alpha(t), \beta'(t)\big\rangle \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, prove que se α tem velocidade constante, isto é, $|\alpha'(t)| \equiv C$ para todo t, então

$$\alpha'(t) \perp \alpha''(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Em outras palavras, se uma curva é tal que a magnitude do vetor velocidade permanece constante, então seu vetor velocidade é ortogonal ao seu vetor aceleração em todos os pontos da curva.

Exercício 10. Generalizando o exercício anterior, considere $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ uma transformação bilinear. Mostre que, para $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ curvas diferenciáveis, vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B\big(\alpha(t), \beta(t)\big) = B\big(\alpha'(t), \beta(t)\big) + B\big(\alpha(t), \beta'(t)\big) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 11. Um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ é uma função vetorial $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Dizemos que o campo F é um **campo gradiente** quando existe uma função escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = -\nabla\phi$.

Em um sistema mecânico clássico cujo campo de forças depende apenas da posição, uma trajetória é uma curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaz a Equação de Newton

$$m\,\alpha''(t) = F\big(\alpha(t)\big). \tag{2}$$

Mostre que, se F é um campo gradiente, então há conservação de energia, isto é, a função

$$E(t) = \frac{m|\alpha'(t)|^2}{2} + \phi\big(\alpha(t)\big)$$

é constante. Por esta razão, campos gradiente também são conhecidos como **campos conservativos**.

Outra forma de enunciar este princípio de conservação de energia é o seguinte: o funcional energia definido como

$$E(x,v) = \frac{m|v|^2}{2} + \phi(x)$$

é constante *ao longo das trajetórias* $t \longmapsto \big(\alpha(t), \alpha'(t)\big)$ do sistema.

Dica: Fazer o produto interno com $\alpha'(t)$ em (2), utilizar o Exercício 9 e o Teorema Fundamental do Cálculo para funções reais de uma variável real.

Exercício 12. Considere uma função escalar $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma função vetorial $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$. O objetivo deste problema é entender a derivada do produto $uf : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ dado por

$$(uf)(x) := u(x)f(x).$$

Prove que, para $x \in \mathbb{R}^d$ fixado, a transformação linear $(uf)'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ satisfaz

$$(uf)'(x)\cdot h = u(x)\big(f(x)\cdot h\big) + \big(\mathrm{d}u(x)\cdot h\big)f(x), \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^d$$

Ou ainda, com a notação do Exercício 15 da Lista Zero, tem-se

$$(uf)'(x) = u(x)f'(x) + f(x) \otimes \mathrm{d}u(x).$$

A fórmula acima é um tipo de Regra do Produto. A derivada de uma função escalar vezes uma vetorial nos dá, como de costume, o primeiro termo vezes a derivada do segundo mais o segundo termo vezes a derivada do primeiro. No entanto, deve-se tomar cuidado na análise de cada um dos termos: em $u(x)f'(x)$ encontramos um número $u(x) \in \mathbb{R}$ vezes um funcional linear $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, o que resulta em um já esperado funcional linear; por outro lado, é o produto tensorial $f(x) \otimes \mathrm{d}u(x)$ que descreve a noção correta de produto entre o vetor $f(x) \in \mathbb{R}^d$ e o funcional linear $\mathrm{d}u(x) \in (\mathbb{R}^d)^*$.

Observamos que algumas referências usam a notação $\nabla f(x) := f'(x)^T$, onde o superescrito T indica que se toma a "transposta" de $f'(x)$. Neste caso, o item anterior pode ser reescrito como

$$\nabla(uf)(x) = u(x)\nabla f(x) + \nabla u(x) \otimes f(x),$$

pois, como você deve verificar, $(v \otimes w)^T = w \otimes v$. Note ainda que o símbolo ∇ apenas representa um gradiente na fórmula acima quando recai sobre u, que é uma função escalar.

Exercício 13. Considere dois espaços vetoriais V e W normados, isto é, espaços vetoriais munidos de normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em V e W, respectivamente.

- (i) Defina o conceito de diferenciabilidade para uma função da forma $\Phi : V \longrightarrow W$.
- (ii) Seja $M(n)$ o conjunto das matrizes de ordem $n \times n$. Mostre que a aplicação $\Phi : M(n) \longrightarrow M(n)$ dada por $\Phi(A) = A^2$ é diferenciável (faz diferença a norma escolhida?) e encontre uma expressão para a derivada $\Phi'(A)\cdot H$.
- (iii) Mostre que se Φ é diferenciável, então Φ é contínua.
- (iv) Discuta a validade de algum resultado análogo à Desigualdade do Valor Médio no contexto deste exercício.
- (v) Descreva como o conceito deste exercício é utilizado nas notas de aula ao considerarmos derivadas de ordem maior do que um.

Exercício 14. Considere $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função duas vezes diferenciável. O objetivo deste exercício é escrever $f''(x_0)(v,w)$ em coordenadas canônicas.

Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, os escrevemos em coordenadas canônicas como

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^n w^i e_i.$$

Obter as m componentes do vetor $f''(x_0)(v,w) \in \mathbb{R}^m$ em termos das derivadas parciais de segunda ordem de f e das coordenadas de v e w.

Exercício 15. Considere as funções u, v, w, z introduzidas no Exercício 4.

(i) Mostre que a derivada segunda de u é o produto escalar em $\mathbb{R}^d$, isto é,

$$u''(x)[v,w] = \langle v, w\rangle.$$

Como consequência, justifique que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\nabla^2 u(x) = \mathrm{Id} \quad \text{e que} \quad \Delta u(x) = d.$$

Além disso, sendo a derivada segunda independente de x, prove que $f^{(k)}(x) \equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e todo $k \geq 3$.

(ii) Prove que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^d$, temos $v''(x) = 0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Em particular, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, temos $\nabla^2 v(x) = 0 \in M(d)$ e $\Delta v(x) = 0 \in \mathbb{R}$.

(iii) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, temos

$$w''(x)[v,w] = \frac{1}{|x|}\left(\langle v, w\rangle - \frac{\langle v, x\rangle\langle w, x\rangle}{|x|^2}\right)$$

e

$$\nabla^2 w(x) = |x|^{-1}\,\mathrm{Id} - |x|^{-3} x \otimes x = \frac{1}{|x|}\left(\mathrm{Id} - \frac{x}{|x|} \otimes \frac{x}{|x|}\right).$$

Além disso, $\Delta w(x) = (d-1)|x|^{-1}$.

<u>*Dica*</u>: você pode calcular duas derivadas direcionais diretamente ou utilizar o item (iv) do Exercício 12 para determinar a Hessiana e depois descrever a segunda derivada. Além disso, para o cálculo do Laplaciano, lembre que o traço é uma operação linear e mostre que satisfaz $\mathrm{tr}(x \otimes y) = x \cdot y$.

(iv) Finalmente, para $x \in \mathbb{R}^d$, prove que as derivadas da função z são dadas por

$$z''(x)[v,w] = \alpha|x|^{\alpha-2}\left(\langle v, w\rangle + (\alpha-2)\frac{\langle v, x\rangle\langle w, x\rangle}{|x|^2}\right),$$

$$\nabla^2 z(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}\,\mathrm{Id} + \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-4} x \otimes x = \alpha|x|^{\alpha-2}\left(\mathrm{Id} + (\alpha-2)\frac{x}{|x|} \otimes \frac{x}{|x|}\right)$$

e

$$\Delta z(x) = \alpha(d + \alpha - 2)|x|^{\alpha-2}.$$

Exercício 16. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funções duas vezes diferenciáveis. Definindo a função $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \langle f(x), g(x)\rangle,$$

encontre a expressão da forma bilinear $F''(x)(u,v)$.

<u>*Dicas*</u>: Você pode utilizar o exercício anterior ou, alternativamente, usar a Regra da Cadeia ao expressar F como a composta das funções $\Psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\Psi(x) = \big(f(x), g(x)\big)$ e $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $B(y,z) = \langle y, z\rangle$.

Exercício 17. Sejam $GL(n) = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n);\ T \text{ é invertível}\}$ e $f : GL(n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ definida por $f(T) = T^{-1}$. Encontre uma expressão para $f''(T)(H,K)$.

<u>*Dicas*</u>: Note que

$$f' : A \longmapsto A^{-1} \longmapsto (A^{-1}, A^{-1}) \longmapsto f'(A),$$

onde, no último passso, foi aplicada a aplicação bilinear

$$\begin{aligned} B : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n); \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\big) \\ (S,T) &\longmapsto B(S,T)(H) := -SHT. \end{aligned}$$

Alternativamente, outra forma de resolver este problema, mas talvez de modo um pouco menos elementar, seria expressar T^{-1} como série de potências em $GL(n)$.

Exercício 18. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k definida em um aberto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que a função resto definida pela identidade

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k + r(x-a),$$

satisfaz

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x-a)}{|x-a|^k} = 0.$$

Esta é uma versão da Fórmula de Taylor diferente da que vimos em aula, cujo resto não é explícito, mas que não necessita ser $f \in C^{k+1}$.

Exercício 19. (i) Mostre que se uma função diferenciável $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tem um único ponto crítico e este é um ponto de mínimo local estrito, então ele é ponto de mínimo global.

(ii) O objetivo deste item é mostrar, com um exemplo, que, em dimensões maiores, a afirmação do item (i) não é mais válida. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2$.

- (a) Mostre que $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.
- (b) Mostre que $(0,0)$ é ponto de mínimo local estrito.
- (c) Verifique que $f(1,-4) = -11 < 0$. Conclua que $(0,0)$ não é o ponto de mínimo global.

Obs. Um outro contra-exemplo é a função $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$, mas não se consegue uma função que seja um polinômio de grau quatro ou menos que que tenha esta propriedade.

Exercício 20. Escreva a Fórmula de Taylor de ordem 2 de uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ explicitamente, nos seguintes casos:

1. Em termos do gradiente e da matriz Hessiana.
2. Em termos das derivadas parciais de primeira e de segunda ordem de f.

Exercício 21. Mostre que se f é um polinômio de grau n em duas variáveis, então

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = \sum_{i+j \le n} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) x^i y^j.$$

Essa igualdade é exata, sem o termo $r(x,y)$. Use esse fato para provar que se $f(x_0,y_0) = 0$, então existem polinômios g e h tais que $f(x,y) = (x-x_0)g(x,y) + (y-y_0)h(x,y)$, isto é, o ideal $I = \{f \mid f(x_0,y_0) = 0\}$ tem dois geradores, $I = [x - x_0, y - y_0]$.

Exercício 22. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \psi\big(\langle a, x\rangle\big)$, onde $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2. Mostre que, se $n \geq 2$, todo ponto crítico de f é degenerado.

Exercício 23. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \big(y - x^2\big)\big(y - 2x^2\big)$. Prove que a origem é um ponto de mínimo local para a restrição de f a qualquer reta passando pela origem, mas não é um ponto de mínimo local para f.

Dica: Examine os sinais assumidos por f.

Exercício 24. Encontre e classifique os pontos críticos das funções:

(i) $f(x,y) = x^3 + x - 4xy - 2y^2$

(ii) $f(x,y) = 2x^3 + (x-y)^2 - 6y$

Exercício 25. Considere n pontos em $\mathbb{R}^3$, denotados por $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prove que o ponto em que a soma dos quadrados das distâncias aos pontos P_i é mínima é o centro de gravidade $P = (x, y, z)$, cujas coordenadas são

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Exercício 26. Diagonalize as forma quadráticas, decidindo em cada caso se são positivas, negativas ou indefinidas:

(a) $Q(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$.

(b) $Q(x, y, z) = 2xy + yz - 3xz$.

(c) $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + xy - xt + 2yt$.

Identifique, quando existirem, os pontos de máximo, mínimo ou sela destas formas.