Lista Zero – Prof. Diego Marcon

Análise Matemática C

Lista de exercícios preliminares. É esperado que o aluno esteja familiarizado com alguns ou vários destes problemas para um bom acompanhamento do curso. Faça aqueles que você julgar estar menos familiarizado. A lista contempla:

- Problemas de revisão de Álgebra Linear;
- Propriedades da norma de operadores de uma transformação linear;
- Isomorfismos canônicos (também ditos naturais).

Exercício 1. Defina base e dimensão de um espaço vetorial U. Mostre que a dimensão está bem definida.

Exercício 2. Sejam U e V espaços vetoriais. Defina uma transformação linear $T : U \to V$ e mostre que $T(0) = 0$.

Exercício 3. Sejam U e V espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear. Definimos o núcleo de T por

$$\operatorname{Nuc} T = \big\{u \in U;\ T(u) = 0\big\}.$$

(i) Mostre que $\operatorname{Nuc} T$ é um subespaço vetorial de U;

(ii) Mostre que T é injetiva se, e somente se, $\operatorname{Nuc} T = \{0\}$.

Exercício 4. O produto de uma matriz A de ordem $m \times n$ por um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser motivado pela representação matricial de um sistema linear de equações. Mais precisamente, definimos[1]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

justamente porque, desta forma, é possível representar o sistema linear com m equações e n variáveis independentes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{2}$$

pela equação $Ax = b \in \mathbb{R}^m$. O uso de tabelas (matrizes) faz com que as operações com as linhas seja mais fácil e sistemático. Verifique que são equivalentes:

(i) O sistema linear (2).

[1] Neste exercício, embora não seja absolutamente relevante, nós estamos representando os vetores de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$ nas bases canônicas dos respectivos espaços.

(ii) A identidade vetorial $Ax = b$, onde o vetor $Ax \in \mathbb{R}^m$ é definido como em (1).

(iii) O vetor b pode ser escrito como combinação linear das colunas da matriz A:

$$b = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n.$$

Observe que os coeficientes da combinação linear são os coeficientes do vetor $x \in \mathbb{R}^n$.

(iv) $b \in \mathbb{R}^m$ pertence à imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T(x) = Ax$.

Exercício 5. Seja A uma matriz (quadrada) de ordem $n \times n$. Dizemos que A é **invertível** quando existe uma matriz, denotada por A^{-1}, que satisfaz

$$AA^{-1} = I \quad \text{e} \quad A^{-1}A = I.$$

Prove que as afirmações abaixo são equivalentes. A maioria das implicações podem ser obtidas utilizando as diferentes representações do exercício anterior.

(i) A é invertível;

(ii) Existe uma matriz B tal que $AB = I$;

(iii) Existe uma matriz C tal que $CA = I$;

(iv) Para todo $b \in \mathbb{R}^n$, o sistema $Ax = b$ possui exatamente uma solução;

(v) O sistema $Ax = 0$ possui somente a solução trivial;

(vi) As colunas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de A são linearmente independentes;

(vii) Todo vetor $b \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear das colunas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de A;

$(viii)$ Todo vetor $b \in \mathbb{R}^n$ pertence a $\mathrm{Ger}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, espaço gerado pelas colunas de A;

(ix) As colunas de A geram $\mathbb{R}^n$, isto é, $\mathrm{Ger}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = \mathbb{R}^n$;

(x) $T(x) = Ax$ é sobrejetiva;

(xi) $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^n$;

(xii) $T(x) = Ax$ é injetiva;

$(xiii)$ $\operatorname{Nuc} T = \{0\}$;

(xiv) $T(x) = Ax$ é invertível,

(xv) A^T é invertível.

Exercício 6. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$T(x, 0) = 0 \implies x = 0. \tag{3}$$

Acima, estamos escrevendo $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+k}$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^k$. Prove que, para $y \in \mathbb{R}^k$ fixado, existe único $x = x(y) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$T(x, y) = 0.$$

Além disso, a aplicação $y \longmapsto x(y)$ é linear. Este problema pode ser visto como uma "versão linear" do Teorema da Função Implícita, a ser visto em aula.

Exercício 7. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $T : U \to V$ uma transformação linear. Mostre que

$$\dim(\operatorname{Nuc} T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim U.$$

Exercício 8. Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Seja $\mathcal{B}_1$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}_2$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Encontre uma matriz A de ordem $m \times n$ tal que

$$\big[T(x)\big]_{\mathcal{B}_2} = A \cdot \big[x\big]_{\mathcal{B}_1}.$$

A matriz A é chamada de *matriz canônica* associada com a transformação T. Descreva as colunas da matriz A.

Exercício 9. Dado um espaço vetorial V de dimensão finita igual a n, denotamos por

$$V^* = \big\{\ell : V \longrightarrow \mathbb{R};\ \ell \text{ linear}\big\}$$

o seu espaço dual.

(i) Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, defina, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, o funcional linear $\mathrm{d}x^j : V \longrightarrow \mathbb{R}$ nos elementos da base $\mathcal{B}$ por

$$\mathrm{d}x^j(v_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Prove que $\mathcal{B}^* := \{\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^n\}$ é uma base de V^*.

(ii) Prove que se $v \in V$ é tal que $\ell(v) = 0$ para todo $\ell \in V^*$, então $v = 0$.

(iii) Mostre que V e $V^{**} := (V^*)^* = \big\{u : V^* \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ linear}\big\}$ são canonicamente isomorfos, isto é, exiba um isomorfismo que é independente de bases ou estruturas adicionais sobre V (e mostre que é um isomorfismo entre os espaços vetoriais).

Exercício 10. Seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear e seja $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de U. Mostre que a transformação linear T é completamente determinada pelos seus valores (vetoriais) nos elementos da base $\mathcal{B}$. Mais precisamente, se $S : U \longrightarrow V$ é uma transformação linear e vale que

$$S(u_i) = T(u_i) \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

mostre que $S = T$.

Exercício 11. Para $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, definimos a *norma de operador* de T

$$\|T\| := \max\big\{\big|T(x)\big|;\ x \in \mathbb{R}^n \text{ com } |x| = 1\big\}. \tag{4}$$

(i) Mostre que de fato podemos escrever $\max$ em (4) ao invés de $\sup$.

(ii) Prove que (4) define uma norma no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, isto é, que vale que

- $\|T\| \geq 0$ para qualquer T e $\|T\| = 0 \iff T = 0$;
- $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$, para quaisquer $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$, para quaisquer $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

(iii) Mostre que (4) é equivalente a

$$\|T\| := \max\left\{\frac{|T(x)|}{|x|};\ x \in \mathbb{R}^n \text{ com } x \neq 0\right\}.$$

Em particular, tem-se

$$|T(x)| \leq \|T\|\,|x| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(*iv*) Mostre que, para $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$,

$$\|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|.$$

Exercício 12. Prove o Teorema da Representação de Riesz para espaços de dimensão finita, enunciado a seguir. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dado $\ell \in V^*$, mostre que existe único $w \in V$ tal que

$$\ell(v) = \langle v, w\rangle \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

Como consequência, equipando V^* com a norma de operadores do exercício anterior, prove que a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : V^* &\longrightarrow V \\ \ell &\longmapsto w \end{aligned}$$

é uma isometria linear, isto é, é um isomorfismo entre os respectivos espaços vetoriais normados que satisfaz $\|\ell\| = |w|$.

Obs: Apesar de o Teorema da Representação de Riesz fornecer um isomorfismo $V^* \simeq V$, este isomorfismo não é canônico, pois depende da estrutura de produto interno do espaço vetorial V. Em outras palavras, produtos internos diferentes geram isomorfismos diferentes, não havendo uma escolha que seja "mais natural" do que outras.

Exercício 13. Prove que existe uma identificação $\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^m$ que é um isomorfismo canônico. Mais precisamente, mostre que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m) \\ x &\longmapsto \Phi(x) \end{aligned}$$

onde $\Phi(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é a transformação linear dada por $\Phi(x)(t) := tx$, é um isomorfismo de espaços vetoriais. Pela definição de Φ, podemos concluir que esta identificação é canônica (por quê?).

Exercício 14. Defina

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) = \{B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m;\ B \ \text{ é bilinear}\}$$

e mostre que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\big) &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \\ T \qquad &\longmapsto \Phi(T)[x,y] := T(x)(y) \end{aligned}$$

é um isomorfismo canônico de espaços vetoriais.

Exercício 15. Seja V um espaço vetorial real de dimensão d e V^* o seu espaço dual. Dado um vetor $v \in V$ e um funcional linear (também dito um covetor) $\ell \in V^*$, definimos a transformação linear $v \otimes \ell : V \longrightarrow V$ por

$$(v \otimes \ell)(x) := \ell(x)v. \tag{5}$$

(*i*) Para $v \neq 0$ e $\ell \neq 0$, prove que $v \otimes \ell \in \mathcal{L}(V;V)$ tem posto um, isto é, $\dim \operatorname{Im}(v \otimes \ell) = 1$.

(*ii*) Fixada uma base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ de V e $\mathcal{B}^* = \{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_d\}$ sua base dual, escrevemos

$$v = \sum_{i=1}^{d} v_i e_i \quad \text{e} \quad \ell = \sum_{j=1}^{d} \ell_j \mathrm{d}x_j.$$

Mostre que a representação matricial de $v \otimes \ell$ na base $\mathcal{B}$ tem entradas $(v \otimes \ell)_{ij} = v_i \ell_j$.

(iii) Mostre que $\operatorname{tr}(v \otimes \ell) = \ell(v)$.

(iv) Para cada $v \neq 0$ e $\ell \neq 0$, prove que $v \otimes \ell$ é diagonalizável. Além disso, determine uma base de autovetores e a matriz diagonal associada.

<u>*Dica*</u>: Olhar para $\operatorname{Nuc} \ell$ e algum subespaço complementar.

(v) Dada uma transformação linear qualquer $T \in \mathcal{L}(V; V)$, mostre que

$$T = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\, e_i \otimes \ell_j,$$

onde os coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ são as entradas da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ associada à transformação T na base $\mathcal{B}$. Além disso, prove que

$$\mathcal{L}(V; V) = \operatorname{Ger}\big\{e_i \otimes \ell_j;\ i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}\big\}.$$

Utilizamos notação $V \otimes V^* := \operatorname{Ger}\{v \otimes \ell;\ v \in V, \ell \in V^*\}$ e, pelo último item acima, temos que $V \otimes V^* = \mathcal{L}(V; V)$. Convêm mencionar que, mais adiante no curso, a notação tensorial é utilizada de maneira ligeiramente diferente, pois o espaço tensorial $V \otimes V^*$ é introduzido a partir de uma "propriedade universal", a ser discutida no momento oportuno. No entanto, mesmo sem explicitar esta outra construção aqui neste exercício, adiantamos que a identificação

$$\begin{aligned} \Phi : V \otimes V^* &\longrightarrow \mathcal{L}(V; V) \\ v \otimes \ell &\longmapsto \Phi(v \otimes \ell) \end{aligned}$$

dada por

$$\Phi(v \otimes \ell)(x) := \ell(x)v,$$

define um isomorfismo canônico. A identificação canônica acima é justamente a motivação da definição (5).

Exercício 16. Mostre que o espaço vetorial $\mathcal{B}(V^*, V; \mathbb{R})$, das transformações bilineares da forma $B : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, é canonicamente isomorfo ao espaço $V \otimes V^*$ e exiba um isomorfismo. Como consequência, temos identificações canônicas

$$\mathcal{L}(V; V) \simeq \mathcal{B}(V^*, V; \mathbb{R}) \simeq V \otimes V^*.$$

Exercício 17. Este exercício objetiva descrever o Exercício 15 no caso $V = \mathbb{R}^d$ e fazendo uso da estrutura Euclidiana dada pelo produto escalar em $\mathbb{R}^d$ através do Teorema da Representação de Riesz. Você deve conferir que as afirmações dadas aqui são válidas e que estão coerentes com o Exercício 15 a partir do Teorema de Riesz. Dados vetores $v, w \in \mathbb{R}^d$, a notação tensorial $v \otimes w$ indica a transformação linear $v \otimes w : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de posto um dada por

$$(v \otimes w)(y) = \langle y, w \rangle v,$$

cuja representação canônica matricial tem entradas $(v \otimes w)_{ij} = v_i w_j$. Ao utilizar esta notação, estamos usando implicitamente a estrutura Euclidiana usual para identificar $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d \otimes (\mathbb{R}^d)^*$. O isomorfismo $\mathbb{R}^d \otimes (\mathbb{R}^d)^* \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, por sua vez, é canônico pelo Exercício 15 e não faz uso dessa estrutura. Muitas vezes, é conveniente identificar $\mathbb{R}^d$ com o seu dual, mas é importante saber reconhecer os casos em que a identificação está sendo feita ou não.

Exercício 18. Verifique que, se $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma aplicação diagonalizável com autovalores reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, não necessariamente distintos, e com base de autovetores associada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$, então podemos escrever

$$T = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, v_i \otimes v_i.$$