UFRGS – Instituto de Matemática
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01355 – Álgebra Linear I-A
Prova 1 – 03 de Maio de 2011 – 08h30min

1	2	3	4	5	Total

A.

Nome: ______________________________ **Cartão:** __________ **Turma:** _____

Questão 1. (2.0pt) Considere

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix},$$

e seja ainda W o subespaço gerado por v_1, v_2, v_3 e v_4.

Verifique se $u \in W$, justificando sua resposta. Em caso afirmativo, escreva u como uma combinação linear dos vetores geradores de W.

Questão 2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que faz reflexão com respeito à reta $y = x$, seguida de projeção no eixo x.

(a)(1.0pt) Determine $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, e $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

(b)(1.0pt) Encontre a matriz de T e determine o núcleo e a imagem de T.

Questão 3. (a)(1.0pt) Define *base* de um espaço vetorial.

(b)(1.0pt) Determine se $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ ou não, justificando sua resposta.

Questão 4. (2.0pt) Classifique os vetores abaixo em L. I. ou L. D., justificando sua resposta:

(a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) polinômios em $t \in \mathbb{R}$: $p_1 = 1 + t$, $p_2 = 2 - 3t$, $p_3 = 4 - 4t$. Qual a dimensão do espaço gerado ?

Questão 5. Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.

(a) (1.0pt) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a transformação linear dada por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x + 3y \end{bmatrix}$, então $v = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ pertence à imagem de T.

(b) (1.0pt) Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Se $X^{-1} = AB$, então $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Bom Trabalho.

UFRGS – Instituto de Matemática
Depto. de Matemática Pura e Aplicada
MAT01355 –Álgebra Linear I A
VERIFICAÇÃO II – 05 de julho de 2011

1	2	3	4	5	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** __________ **Turma:** _____

- **Questão 1 :** Sabendo que os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ são dados por $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$,

responda o que se pede abaixo.

(a) Determine os autoespaços de A.

(b) Decida se A é diagonalizável ou não, justificando sua resposta.

- **Questão 2 :** Considere $W = \mathcal{G}er\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Determine uma base ortogonal para W.

(b) Decomponha o vetor $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ como $v = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

- **Questão 3 :** Considere a forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores de A.

(a) Classifique a forma quadrática Q. Justifique.

(b) Encontre a expressão de $Q(x_1, x_2, x_3)$. Encontre P tal que a mudança para uma nova variável $\mathbf{y}$, via $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, elimine os termos mistos da nova expressão de Q. Encontre essa nova expressão.

(c) Encontre o máximo de $Q(\mathbf{x})$ sujeito a $|\mathbf{x}| = 1$ e o ponto onde ele ocorre, se existir. Justifique, caso contrário.

- **Questão 4 :** Encontre α e β para os quais a reta $y = \alpha + \beta x$ melhor ajusta os dados abaixo

x	-1	1	2	3
y	-2	-1	0	2

pelo critério dos Mínimos Quadráticos. Use sua resposta para aproximar (extrapolar) y quando $x = 5$.

- **Questão 5 :** Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.

(a) Sejam A uma matriz 3×3 e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se o posto da matriz $A - \lambda I$ é igual a 1, então podemos garantir que A é diagonalizável.

(b) Sejam A uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Se $\mathbf{b} \in (\mathcal{C}ol\, A)^{\perp}$, então toda solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é também uma solução do sistema homogêneo $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bom Trabalho.

UFRGS – Instituto de Matemática
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01355 – Álgebra Linear I-A
Recuperação 1 – 14 de Julho de 2011 – 08h30min

1	2	3	4	5	Total

A.

Nome: ______________________________ **Cartão:** __________ **Turma:** _____

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 11 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 1. (a)(1.0pt) As colunas da matriz A são LI ou LD ? Qual é o posto da matriz A ? Justifique.

(b)(1.0pt) Encontre a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Qual a dimensão desse espaço de soluções ? Quais são seus vetores geradores ?

Questão 2. (a)(1.0pt) Mostre que $A\mathbf{u_1} = \mathbf{b_1}$. Qual a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b_1}$? Justifique.
(b)(1.0pt) Mostre que $\mathbf{b_2} \notin \mathcal{C}ol(A)$. Qual a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$? Justifique.

Questão 3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que faz giro HORÁRIO de 45 graus, seguido de projeção ORTOGONAL na reta $y = x$.
(a)(1.0pt) Determine $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ e $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.
(b)(1.0pt) Encontre a matriz de T e determine o núcleo e a imagem de T.

Questão 4. Considere os polinômios em t: $p_1 = 1 - t$, $p_2 = 2t - t^3$, $p_3 = 2 + t^3$ e seja $H = P_3 = \{$polinômios de grau menor ou igual a 3$\}$.

(a)(1.0pt) Qual a dimensão de H ? Qual a dimensão de $W = \mathcal{G}er\{p_1, p_2, p_3\}$ como subespaço linear de H ?

(b)(1.0pt) É verdade que $H = W$, ou será que existe algum polinômio $q(t)$ que pertence a H mas não pertence a W ? Justifique.

Questão 5.(2.0pt) Encontre, se existir, a inversa da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bom trabalho.

UFRGS – Instituto de Matemática
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01355 – Álgebra Linear I-A
Recuperação 2 – 14 de Julho de 2011 – 08h30min

1	2	3	4	5	Total

A.

Nome: ________________________________ **Cartão:** __________ **Turma:** _____

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 11 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 1. (a)(1.0pt) Encontre uma base para $\mathcal{C}ol(A)$. Mostre o desenvolvimento.
(b)(1.0pt) Encontre uma base ortogonal para $\mathcal{C}olA$. Mostre o desenvolvimento.

Questão 2.(a)(1.0pt) Encontre a projeção de $\mathbf{b_1}$ em $\mathcal{C}ol(A)$. Mostre o desenvolvimento.
(b)(1.0pt) A matriz A possui algum autovalor nulo ? Em caso afirmativo, encontre uma base para o autoespaço associado a tal autovalor. Mostre o desenvolvimento.

Questão 3. (a)(1.0pt) Encontre $\hat{\mathbf{b_2}}$, a projeção de $\mathbf{b_2}$ em $\mathcal{C}ol(A)$. Mostre o desenvolvimento.
(b)(1.0pt) Encontre a solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$ segundo o critério dos Mínimos Quadrados. Você pode usar a resposta da parte (a). Mostre o desenvolvimento.

Questão 4.(a)(1.0pt) Encontre (mostre o desenvolvimento) os autovalores da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)(1.0pt) Encontre diagonalização PDP^T da matriz B. Mostre o desenvolvimento.

Questão 5. Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.

(a) (1.0pt) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a transformação linear dada por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x+y \\ 2x-2y \end{bmatrix}$, então $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertence à imagem de T.

(b) (1.0pt) Se M é uma matriz simétrica e se um vetor u é tal que $Mu = 0$, então $u \in [\mathcal{C}ol(M)]^\perp$, que coincide com $Nul(M)$.

Bom trabalho.

UFRGS – Instituto de Matemática
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01355 – Álgebra Linear I-A
Recuperação Geral – 14 de Julho de 2011 – 08h30min

1	2	3	4	5	Total

A.

Nome: ______________________________ **Cartão:** __________ **Turma:** _____

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 11 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 1. (a)(1.0pt) As colunas da matriz A são LI ou LD ? Qual é o posto da matriz A ? Justifique.

(b)(1.0pt) Encontre a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Qual a dimensão desse espaço de soluções ? Quais são seus vetores geradores ?

Questão 2. (a)(1.0pt) Mostre que $A\mathbf{u_1} = \mathbf{b_1}$. Qual a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b_1}$? Justifique.
(b)(1.0pt) Mostre que $\mathbf{b_2} \notin \mathcal{C}ol(A)$. Qual a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$? Justifique.

Questão 3. (a)(1.0pt) Encontre uma base para $\mathcal{C}ol(A)$. Mostre o desenvolvimento.
(b)(1.0pt) Encontre uma base ortogonal para $\mathcal{C}ol A$. Mostre o desenvolvimento.

Questão 4.(a)(1.0pt) Encontre a projeção de $\mathbf{b_1}$ em $\mathcal{C}ol(A)$. Mostre desenvolvimento.
(b)(1.0pt) A matriz A possui algum autovalor nulo ? Em caso afirmativo, encontre uma base para o autoespaço associado a tal autovalor.

Questão 5. (a)(1.0pt) Encontre $\hat{\mathbf{b}}_\mathbf{2}$, a projeção de $\mathbf{b_2}$ em $\mathcal{C}ol(A)$. Mostre o desenvolvimento.
(b)(1.0pt) Encontre a solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$ segundo o critério dos Mínimos Quadrados. Você pode usar a resposta da parte (a). Mostre o desenvolvimento.

Bom trabalho.