Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
TESTE 1 - turma B2 - 2023/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Esse teste tem duração de 50min. Você pode escrever à lapis. (2) Calculadoras ou qualquer outra forma de ajuda computacional não podem ser usadas. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) número de Euler $= e \approx 2.72$, $\exp(x) = e^x$.

Pontuação: Cada questão vale 0.6pt. Em questões alternativas, marque apenas 1, sem necessidade de justificar. Em questões discursivas, a ausência de justificativa(s) será penalizada.

Q1. Sobre o domínio natural D_n de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{3}{2}}$ é correto:

( ) $D_n = \mathbb{R}$

( ) D_n é o intervalo $[0, 2]$

( ) D_n é o intervalo $(0, 2)$

(X) D_n é o intervalo $[2, \infty)$

( ) D_n é o intervalo $[0, \infty)$

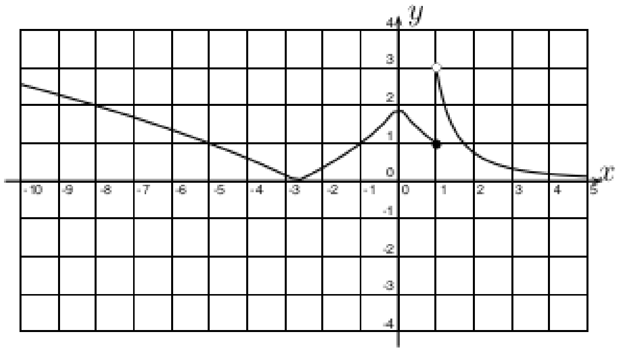
( ) nenhuma das demais alternativas está correta

$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ não impõe restrições em x
$(x-2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(x-2)^3}$ somente está definida se $(x-2)^3$ for não negativo, isto é, se $x-2$ for não negativo. Portanto $D_n = [2, \infty)$.

Q2. Ao lado está representado o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} \left|3 - \sqrt{1+3|x|}\right| & , x \leq 1 \\ \frac{3}{x^2} & , x > 1 \end{cases}$$

no intervalo $[-10, 5]$. É correto:



( ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe

( ) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

( ) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ não existe

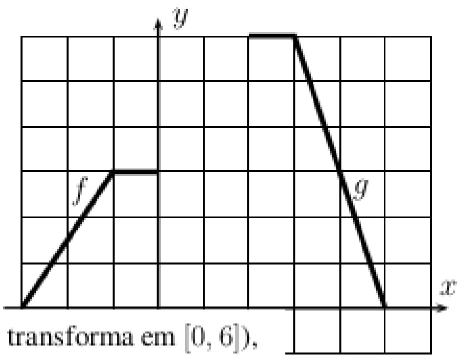
(X) $\lim\limits_{x\to -8} f(x) = 2$

( ) f é contínua em $x = 1$, apesar de $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existir

( ) nenhuma das demais alternativas está correta

somente é correto $\lim\limits_{x\to -8} f(x) = 2$

Q3. Ao lado estão representados o gráficos de funções f e g, bem como os eixos coordenados. É correto:



( ) $g(x) = 2f(x-2)$

( ) $g(x) = f(2x+2)$

(X) $g(x) = 2f(2-x)$

( ) $g(x) = 2 - 2f(-x)$

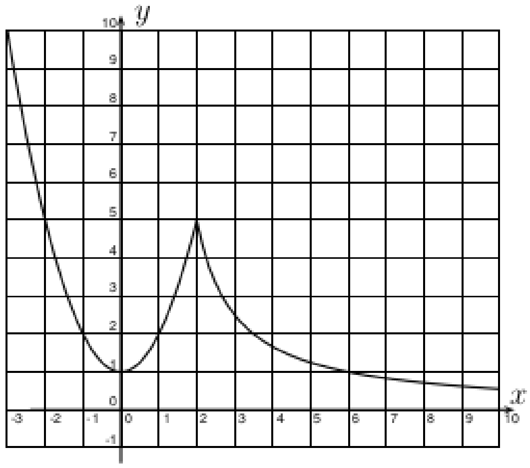
( ) $g(x) = 2f(-x-2)$

O gráfico mostra um alongamento de fator 2 na vertical (imagem $[0, 3]$ transforma em $[0, 6]$), bem como uma reflexão horizontal. Não evidencia reflexão vertical, portanto apenas temos duas possibilidades na lista: $g = 2f(2-x)$ e $g = 2f(-x-2)$. (i) Para $g(x) = 2f(2-x)$ temos $f(x) \to u(x) = 2f(x+2) \to g(x) = u(-x)$ portanto, a partir do gráfico de f: translação 2 unid para esquerda, alongamento vertical fator 2, seguido de reflexão horizontal. (ii) Para $g(x) = 2f(-x-2)$ temos $f(x) \to u(x) = 2f(x-2) \to g(x) = u(-x)$ portanto, a partir do gráfico de f: translação 2 unid para direita, alongamento vertical fator 2, seguido de reflexão horizontal. Tentando essas 2 possibilidades, vemos que (i) é a que produz o gráfico correto de g.

Q4. Ao lado temos o gráfico de

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , -3 \le x \le 2 \\ \frac{5}{x-1} & , 2 < x \le 10 \end{cases}.$$

Obtenha expressão analítica e domínio da função inversa g de f, sob restrição $x = g(y), -3 \le x \le 0$, ou justifique que não existe(m).



O gráfico mostra que f é decrescente em $[-3, 0]$, portanto possui inversa nesse intervalo, que estabelece $x \le 0$ e $y \ge 1$

$$y = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow -x = \sqrt{y-1}$$

portanto $x = -\sqrt{y-1} = g(y)$, com domínio em $y \ge 1$ define a função inversa para o intervalo de x pedido.

Q5. Obtenha, usando técnicas trabalhadas em aula, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{6x^2+1}}{x}$

Temos $\lim\limits_{x \to -\infty} 6x^2 + 1 = \infty$ portanto $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{6x^2+1} = \infty$.

Além disso o denominador também não tem limite ao $x \to -\infty$, com valor absoluto crescendo sem cota. Dividindo numerador e denominador por $|x| = -x$::

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{6x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{6x^2+1}/|x|}{x/|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{6x^2+1}/\sqrt{x^2}}{-1} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{6 + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{6}$$

Bom Trabalho.

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
Prova 1 - turma B2 - 2023/2

Nome: GABARITO **Cartão:**

Q1. Considere $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

[A](0.6pt) Sobre o gráfico de f é correto:
( ) não possui assíntotas horizontais
( ) $x = 1$ é a única assíntota vertical
( ) $x = -1$ é uma assíntota horizontal
(X) $x = -2$ é a única assíntota vertical
( ) $x = 1$ e $x = -2$ são assíntotas verticais
( ) nenhuma das anteriores está correta

[B](0.6pt) sobre a derivada de f em $x = 0$ é correto:
(X) $f'(0) = -1/4$
( ) $f'(0) = -3/4$
( ) $f'(0) = 0$
( ) $f'(0) = 1/2$
( ) não existe
( ) nenhuma das anteriores está correta

Solução: Assíntotas verticais: por Baskara: $x^2 + x - 2 = 0$ possui soluções $x = -2$ e $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1} -\frac{1+x}{x+2} = -\frac{2}{3}$$

por outro lado,

$$\lim_{x\to -2} \frac{1-x^2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to -2} -\frac{1+x}{x+2} \text{ que não existe}$$

(limite infinito) portanto $x = -2$ é a única assíntota vertical.

Assíntotas horizontais: dividimos numerador e denominador por x^2 antes do limite:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ é A.H.}$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{1-x^2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ é A.H.}$$

e portanto $y = -1$ é a única assíntota horizontal.

[B] $f(x) = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x+2)(x-1)} = -\dfrac{1+x}{x+2}, x \neq 1$

$$f'(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1+x}{x+2}\right] = -\frac{(x+2)(1)-(1)(x+1)}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

e portanto $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

[C](0.6pt) Sobre F tal que $F'(x) = f(x)$, e o interior H do conjunto onde F é crescente, é correto:
( ) $H = (-\infty, -2) \bigcup (-1, \infty)$
( ) $H = (-2, -1) \bigcup (1, \infty)$
( ) $H = (-1, 1)$
(X) $H = (-2, -1)$
( ) $H = (-\infty, -2) \bigcup (-1, 1)$
( ) nenhuma das anteriores está correta

Solução: Intervalos de crescimento de F requerem $F' = f > 0$ portanto determinaremos o sinal de f na reta real, analisando fatores do numerador e do denominador

$$F'(x) = -\frac{1+x}{x+2} > 0$$

```
____(-2)_____(-1)______ x
------------0+++++++ sinal de (1+x)
-----0++++++++++++++ sinal de (2+x)
-----X++++++0------- sinal de F'
```

e assim $H = (-2, -1)$
conforme mapa de sinais ao lado

Q2. Considere $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x} & , x > 0 \\ \dfrac{\text{sen}(x)}{|x|} & , x < 0 \end{cases}$

[A](0.6pt) É correto:
( ) f é contínua em $x = 0$ pois é derivável neste ponto
(X) f não é contínua em $x = 0$, mas $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe
( ) f não é contínua em $x = 0$, pois $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe
( ) f é contínua em $x = 0$, apesar de não estar definida em $x = 0$
( ) f possui descontinuidade de salto infinito em $x = 0$
( ) nenhuma das anteriores está correta

[B](0.6pt) É correto:
(X) $f'(\pi) = -\dfrac{(\pi+1)e^{-\pi}+1}{\pi^2}$
( ) $f'(\pi) = -\dfrac{1}{\pi}$
( ) $f'(\pi) = \dfrac{(-\pi+1)e^{-\pi}+1}{\pi^2}$
( ) $f'(\pi) = -1$
( ) $f'(\pi) = \dfrac{1}{\pi^2}$
( ) nenhuma das anteriores está correta

Solução: [A] não há continuidade em $x = 0$ pois $f(0)$ não está definida. Limites laterais em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(x)}{-x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(x)}{x} = -1 \text{ (visto em aula)}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x} - 1 + 1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x}$$

entretanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{-x} = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

e portanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 + 0 = -1$.

[B] $x = \pi$ é interior ao intervalo $(0, \infty)$, para o qual:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-x} - \cos(x)}{x}\right] = \frac{x(-e^{-x} + \text{sen}(x)) - (1)(e^{-x} - \cos(x))}{x^2} =$$
$$\frac{-(x+1)e^{-x} + x\,\text{sen}(x) + \cos(x)}{x^2} \Rightarrow f'(\pi) = \frac{-(\pi+1)e^{-\pi} - 1}{\pi^2}$$

[C](0.6pt) É correto:
( ) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1}{xe^x} - \dfrac{\cos(x)}{x}\right) = 0$
( ) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-e^{-x} + \text{sen}(x)}{1} = 1$
( ) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-e^{-x} + \text{sen}(x)}{1} = 0$
(X) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{xe^x} - \dfrac{\cos(x)}{x}\right) = 0$
( ) nenhuma das anteriores está correta

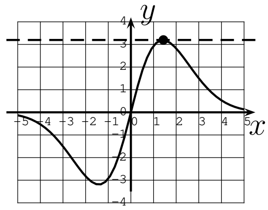
Solução: para $x \neq 0$ temos $-\dfrac{1}{|x|} \leq \dfrac{\text{sen}(x)}{|x|} \leq \dfrac{1}{|x|}$ E $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\text{sen}(x)}{|x|} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\text{sen}(x)}{-x} = 0$ pelo Teorema do Confronto

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{xe^x} - \dfrac{\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{xe^x} - \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0 - 0 = 0$

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x}$ não é indeterminação válida para aplicação da Regra de L'Hôpital.

Q3. Considerando $y = \dfrac{5xe^{-\frac{x^2}{6}}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$ e seu gráfico ao lado



(a)(0.5pt) obtenha $\frac{dy}{dx}$ usando diferenciação logarítmica
(b)(0.5pt) obtenha a equação da reta tracejada, e o ponto de tangência

Solução:

$$\ln(y) = \ln\left(\frac{5xe^{-\frac{x^2}{6}}}{\sqrt[3]{x^2+2}}\right) = \ln(5x) + \ln e^{-\frac{x^2}{6}} - \ln(x^2+2)^{\frac{1}{3}} = \ln(5) + \ln(x) - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{3}\ln(x^2+2)$$

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\frac{2x}{x^2+2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{2x}{3(x^2+2)} = \frac{-x^4 - x^2 + 6}{3x(x^2+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{5xe^{-\frac{x^2}{6}}}{\sqrt[3]{x^2+2}}\frac{-x^4-x^2+6}{3x(x^2+2)} = -\frac{5e^{-\frac{x^2}{6}}(x^4+x^2-6)}{3(x^2+2)^{\frac{4}{3}}}$$

Já que a exponencial acima é sempre positiva, tangente horizontal equivale a $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Por Báskara, $u^2 + u - 6 = 0$ possui uma única raiz positiva $u = x^2 = 2$, em nosso contexto implica $x = \sqrt{2}$, que corresponde a $y = \frac{5\sqrt{2}e^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4e}}$, que é a equação da reta horizontal tracejada

---

Q4.(1.0pt) Obtenha máximos e mínimos absolutos de $f(x) = (x^2+x)^{\frac{2}{3}}$ no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Solução: A função se escreve $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)^2}$ e vemos que é contínua em $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$

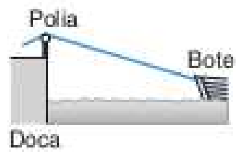
$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2+x)^{-1/3}(2x+1) = \frac{2(2x+1)}{3[x(x+1)]^{1/3}}$$

x	$f(x)$
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{2/3}$
0	0
-1	0
$-\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}$
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}$

Pontos críticos estacionários: $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
pontos críticos de não-diferenciabilidade: $x = 0$ e $x = -1$
extremidades do intervalo $x = -\frac{3}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.
Avaliamos f nesses pontos (ao lado) e concluímos que o mínimo absoluto no intervalo é $y = 0$, enquanto o máximo absoluto é $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}$.

Q5. [A](0.7pt) Uma partícula move-se no plano cartesiano ao longo de uma curva cuja equação é $y = \sqrt{x^3 + 17}$. Quando está em $P(2,5)$, sua ordenada y está decrescendo a uma taxa de 2 unidades por segundo. Com que rapidez sua abscissa x está variando nesse momento ?

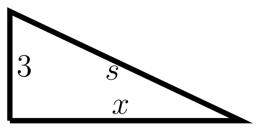
[B](0.7pt) Um bote é puxado para uma doca por meio de uma corda ligada a uma polia na doca (figura ao lado). A corda está ligada à proa do bote em um ponto que se mantém 3 metros abaixo da polia. Com que rapidez a corda deve ser puxada se quisermos que o bote se aproxime da doca a uma taxa de 2 metros/min, no instante em que a distância do bote (à base da doca) é de 20 metros ?



Solução: [A] $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dx}\left[(x^3+17)^{\frac{1}{2}}\right]\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3x^2}{2(x^3+17)^{1/2}}\dfrac{dx}{dt}$

em $(x,y) = (2,5)$, temos $-2 = \dfrac{3(2)^2}{2\sqrt{2^3+17}}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3(2)}{5}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{6}{5}\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{5}{3}$

Solução: [B]



x: distância do bote, s: comprimento da corda esticada, $\frac{dx}{dt} = -2$

$s^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 2s\dfrac{ds}{dt} = 2x\dfrac{dx}{dt}$

quando $x = 20$ temos $s^2 = 9 + 400 \Rightarrow s = \sqrt{409}$. Portanto

$\sqrt{409}\frac{ds}{dt} = 20(-2) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -\frac{40}{\sqrt{409}}$ e assim, nesse instante, a corda deve ser puxada a uma taxa de $\frac{40}{\sqrt{409}}$ m/min

$\square$

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
Teste 2 - turma B2 - 2023/2

Nome: GABARITO **Cartão:**

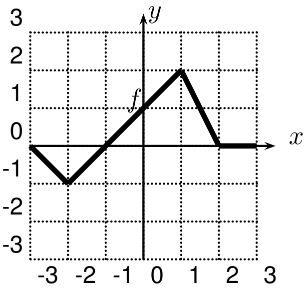
Q1. O Teorema da Diferença Constante estabelece que se $f' = g'$ em algum intervalo I, então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ em I. Sabendo que $g(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$ e que $y(x)$ satisfaz $\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx}$ em $I = [1, \infty)$ e $y(1) = 1$, é correto:

( ) $y(4) = \frac{17}{8}$
(X) $y(4) = 5$
( ) $y(4) = \frac{15}{8}$
( ) $y(4) = 2$
( ) $y(4) = 8$
( ) nenhuma das anteriores está correta

Solução: pelo teorema mencionado, podemos escrever
$y = 4x^{\frac{1}{2}} + C$
Dessa forma $y(1) = 1$ equivale $4(1)^{1/2} + C = 1 \Rightarrow C = -3$, e assim $y = 4x^{\frac{1}{2}} - 3$ implica $y(4) = 4(2) - 3 = 5$.

Q2. Considerando a função f representada no gráfico ao lado, é correto:

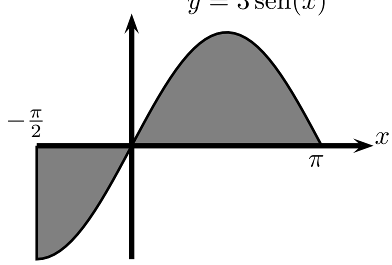
( ) $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)dx = -1$
( ) $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)dx = 3$
( ) $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)dx = 1$
(X) $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)dx = \frac{5}{2}$
( ) nenhuma das anteriores está correta



Solução: analisando todas as alternativas
( ) $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)dx = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (errada)
( ) $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)dx = -1 + 2 = 1$ (errada)
( ) $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)dx = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ (errada)
(X) $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)dx = -\frac{1}{2} + 2 + 1 = \frac{5}{2}$ (correta)
( ) nenhuma das anteriores está correta (errada)

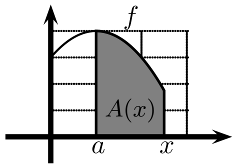
Q3. Sobre a área A da região cinzenta no gráfico ao lado, é correto:

( ) $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 3\cos(x)dx - \int_{0}^{\pi} 3\cos(x)dx$
( ) $A = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 3\cos(x)dx + \int_{0}^{\pi} 3\cos(x)dx$
(X) $A = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\operatorname{sen}(x)|dx$
(X) $A = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{sen}(-x)dx + 3\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx$
( ) $A = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}|x|dx$
( ) nenhuma das anteriores está correta



Solução: a fim de trocarmos o sinal da integral no intervalo onde o integrando é negativo (ou seja $[-\frac{\pi}{2}, 0]$), mantendo caso contrário, sabemos que podemos usar a função valor absoluto $|\cdot|$ portanto
$A = 3\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\operatorname{sen}(x)|dx$ ou ainda
$A = -3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{sen}(x)dx + 3\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx$

Q4. Dada uma função f não-negativa em um intervalo $[a, b]$, seja $A(x)$ a função que associa x, para $a \leq x \leq b$, com a área da região acima do intervalo $[a, x]$ que é limitada pelo gráfico de f (região sombreada na figura ao lado). O método da Antiderivada para determinar $A(x)$ usa a conhecida propriedade que $\frac{dA}{dx} = f$.
(a)(0.4pt) Obtenha $A(x)$ para $f = 3 + 2x - x^2$ e $[a, b] = [1, 3]$ usando o método da Antiderivada.
(b)(0.2pt) Avalie sua resposta $A(x)$ da parte (a) para $x = 3$.



Solução: (a) sendo uma antiderivada de f, A deve escrever $A = 3x + x^2 - \dfrac{x^3}{3} + C$
mas $A(1) = 0$ implica $0 = 3(1) + 1^2 - \frac{1}{3} + C$ e assim $C = -\frac{11}{3}$ e segue $A(x) = 3x + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{11}{3}$
(b) $A(3) = 3(3) + 3^2 - \frac{27}{3} - \frac{11}{3} = \frac{27-11}{3} = \frac{16}{3}$

Q5. Obtenha $\displaystyle\int x\sqrt{1 + 2x^2}\, dx$

Solução: $u = 1 + 2x^2$ implica $du = 4x\, dx$ e portanto

$$\int x\sqrt{1 + 2x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + 2x^2} x dx = \int \sqrt{u}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^{1/2}du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{6}(1 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

onde C é qualquer constante real.
□

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
Prova 2 - turma B2 - 2023/2

Nome: GABARITO - Fila A **Cartão:**

Q1.(0.8pt) Sobre $I = \int_0^2 xe^{-x^2}dx$ é correto:

( ) $I = \frac{1-e^4}{e^4}$
(X) $I = \frac{1-e^{-4}}{2}$
( ) $I = \frac{1-e^{-2}}{2}$
( ) $I = 1 - e^{-2}$
( ) nenhuma das demais alternativas está correta

Solução: $\begin{cases} u = x^2, du = 2xdx \\ x = 0 \Rightarrow u = 0; x = 2 \Rightarrow u = 4 \end{cases}$

$$\int_0^2 xe^{-x^2}dx = \int_0^4 e^{-u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-u}du = \frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]_0^4 = \frac{1-e^{-4}}{2}$$

Q2.(0.8pt) É correto que a técnica de substituição $u = \text{sen}(x)$ transforma $\int \text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$ em:

( ) $\int u^2(1-u^2)^{3/2}du$
( ) $\int u^2(1-u^3)du$
( ) $\int u^2(1-u)^2du$
(X) $\int u^2(1-u^2)du$
( ) nenhuma das demais alternativas

Solução: $u = \text{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x)dx, \cos^2(x) = 1 - u^2$

$$\int \text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx = \int u^2\cos^2(x)du = \int u^2(1-u^2)du$$

Q3.(0.8pt) Uma torneira industrial de fechamento automático, quando acionada, dispensa líquido por exatamente 8 segundos, a uma taxa (vazão) $v(t) = 2 - t^{\frac{1}{3}}$ litros por segundo, onde t é o tempo transcorrido. Sobre a quantidade Q de líquido dispensado, é correto:

(X) $Q = 4$ litros
( ) $Q = 2$ litros
( ) $Q = \frac{15}{4}$ litros
( ) $Q = \frac{17}{4}$ litros
( ) $Q = \frac{13}{4}$ litros
( ) nenhuma das demais alternativas está correta

Solução:

$$Q = \int_0^8 \left(2 - t^{\frac{1}{3}}\right)dt = \left[2t - \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^8 = 2(8) - \frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}} = 16 - \frac{3(16)}{4} = 4$$

Q4.(0.8pt) É correto que substituição trigonométrica, que usa $x = \tan(u)$, transforma $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ em:

( ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(u)du$
( ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2(u)du$
( ) $\int_0^{\pi} \tan^2(u)du$
( ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(u)du$
( ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(u)du$
(X) nenhuma das demais alternativas

Solução: $\begin{cases} x = \tan(u) \Rightarrow dx = \sec^2(u)du \\ 0 = \tan(u) \Rightarrow u = 0; 1 = \tan(u) \Rightarrow u = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2(u)\sec^2(u)du}{\sec^2(u)du} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(u)du$$

Q5.(A)(0.8pt) Obtenha $\int_0^1 (1-x^3)(2-x)dx$

Solução:

$$\int_0^1 (1-x^3)(2-x)dx = \int_0^1 (2 - 2x^3 - x + x^4)dx = \left[2x - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2 - \frac{1^4}{2} - \frac{1^2}{2} + \frac{1^5}{5} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

Q5.(B) (1.0pt) Obtenha $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

Solução:

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{L\to\infty}\int_1^L \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{L\to\infty}\left[\tan^{-1}(x)\right]_1^L = \lim_{L\to\infty}\tan^{-1}(L) - \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Q6. (1.0pt) ESCOLHA 1 DOS PROBLEMAS ABAIXO

(A) Obtenha $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{x^2(4+x^2)}dx$ (B) Obtenha $\displaystyle\int x^2\cos(2x)dx$

Solução: (A) $\dfrac{1+x^2}{x^2(4+x^2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{4+x^2}$ implica

$1+x^2 = Ax(4+x^2) + B(4+x^2) + (Cx+D)x^2 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 4Ax + 4B$ para todo $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4} \\ 4A = 0 \Rightarrow A = 0 \\ B+D = 1 \Rightarrow D = \frac{3}{4} \\ A+C = 0 \Rightarrow C = 0 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1+x^2}{x^2(4+x^2)} = \int\left(\frac{1/4}{x^2} + \frac{3/4}{4+x^2}\right)dx = \frac{1}{4}\int x^{-2}dx + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{4+x^2}$$

Primeiramente, $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{4x} + C$, depois, para $x = 2u, dx = 2du, x^2 = 4u^2$ temos

$$\int\frac{dx}{4+x^2} = \int\frac{2du}{4+4u^2} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{\tan^{-1}(u)}{2} + D = \frac{\text{atan}\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + D$$

implica $\displaystyle\int\frac{1+x^2}{x^2(4+x^2)} = -\frac{1}{4x} + \frac{3}{8}\text{atan}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

Solução: (B) integração por partes $\begin{cases} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = \cos(2x)dx, & v = \frac{\text{sen}(2x)}{2} \end{cases}$

$$\int x^2\cos(2x)dx = \frac{x^2\,\text{sen}(2x)}{2} - \int x\,\text{sen}(2x)dx$$

aplicando mais uma vez $\begin{cases} u = x, & du = dx \\ dv = \text{sen}(2x)dx, & v = -\frac{\cos(2x)}{2} \end{cases}$

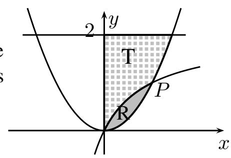
$$\int x\,\text{sen}(2x)dx = -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int\cos(2x)dx = -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\text{sen}(2x)}{4} + C$$

e portanto $\displaystyle\int x^2\cos(2x)dx = \frac{x^2\,\text{sen}(2x)}{2} + \frac{x\cos(2x)}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} + C$

Q7. Ao lado temos os gráficos de $y = x^2$ e $y = 2 - \frac{2}{x+1}$ os quais, juntamente com o eixo y e a reta $y = 2$, delimitam as regiões hachuradas R e T cujos interiores são disjuntos.

(a)(0.2pt) Encontre as coordenadas do ponto de intersecção P.

(b)(0.8pt) Calcule a área da região R.



Solução: (A) $x^2 = 2 - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2x+2-2}{x+1} = \dfrac{2x}{x+1}$ e como $x \neq 0$ temos $x = \frac{2}{x+1}$ ou seja $x^2 + x - 2 = 0$. Aplicando Báskara, encontramos que a raiz positiva é $x = 1$, que corresponde a $P(1,1)$.

Solução: (B) $\displaystyle\int_0^1\left(2 - \frac{2}{x+1} - x^2\right)dx = \left[2x - 2\ln|x+1| - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 - 2\ln(2) - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - 2\ln(2)$

$\square$

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
Recuperação 1 - turma B2 - 2023/2

Nome:

Cartão:

Instruções: (1) Esta prova tem duração de 100min. Você pode escrever à lapis. (2) Calculadoras ou qualquer outra forma de ajuda computacional não podem ser usadas. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) número de Euler $= e \approx 2.72$, $\exp(x) = e^x$.
AVISO: Em questões alternativas, marque apenas 1, sem necessidade de justificar. Em questões discursivas, a ausência de justificativa(s) será penalizada.

Q1. Assinale a afirmação correta sobre o limite.

[A](0.6pt) Sobre $\lim_{x\to\pi} \frac{\text{sen}(x)}{3x}$ é correto:
( ) é igual a -1
( ) não existe
(X) é igual a 0
( ) é igual a 1
( ) é igual a $\frac{1}{3}$
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): $f(x) = \frac{\sin(x)}{3x}$ é contínua em $x = \pi$, e $\sin(\pi) = 0$ implicam que o limite é nulo

[B](0.6pt) sobre $\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{1-x}$ é correto:
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
(X) é igual a -1
( ) é igual a 1
( ) é igual a $-\infty$
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): $\lim_{x\to 1^-} \ln(x) = 0$; $\lim_{x\to 1^-} 1 - x = 0$
podemos aplicar L'Hopital, que produz
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{x} = -1$$

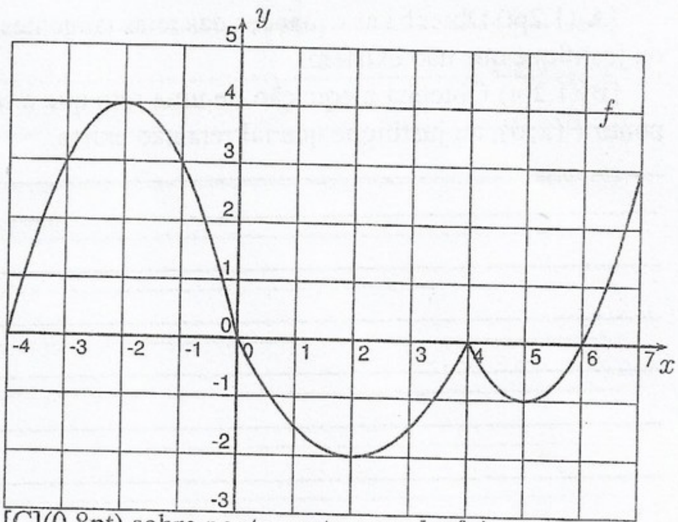
[C](0.6pt) sobre $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^5 - x^3}{1 - x^2}$ é correto:
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a 1
( ) é igual a $-\infty$
( ) não existe
(X) nenhuma das anteriores está correta

(S): $\frac{x^5-x^3}{1-x^2} = \frac{-x^2(1-x^2)}{1-x^2} = -x^2$, para $x \neq \pm 1$, portanto
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^5 - x^3}{1 - x^2} = \lim_{x\to 1^+} -x^2 = -1$$

[D](0.6pt) sobre $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1 - x^3}$ é correto:
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a 1
(X) é igual a $-\infty$
(X) não existe
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): $\lim_{x\to 1^+} x = 1$; $\lim_{x\to 1^+} 1 - x^3 = 0$
este último via valores negativos, logo o quociente assume valores negativos ilimitados.

Q2. Considerando a função f representada ao lado:



[A](0.8pt) sobre pontos específicos de f, é correto:
( ) $x = -2$ é ponto de não diferenciabilidade
( ) $x = 0$ é ponto estacionário
(X) $x = 0$ é ponto de inflexão
( ) $x = 2$ é ponto de inflexão
( ) $x = 4$ é ponto estacionário
( ) $x = 4$ é ponto de inflexão
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): existe troca de concavidade em $x = 0$

[B](0.8pt) sobre a concavidade de f é correto:
( ) f é concava para cima no intervalo $[-4, 4]$
(X) f é concava para cima no intervalo $[0, 6]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[0, 7]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[-2, 2]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[0, 2]$
( ) nenhuma das anteriores está correta

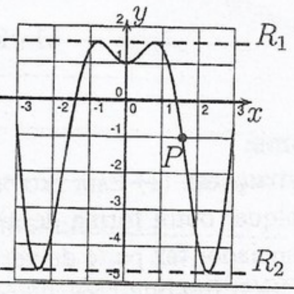
(S): sempre voltada para cima no intervalo $[0, 6]$

[C](0.8pt) sobre pontos extremos de f é correto:
( ) $x = -2$ é ponto de mínimo local
( ) $x = 0$ é ponto de mínimo local
( ) $x = 2$ é ponto de máximo local
(X) $x = 4$ é ponto de máximo local
( ) $x = 6$ é ponto de máximo local
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): $x = 4$ é um ponto crítico onde sinal da derivada troca de positivo (a esq) para negativo

Q3. Considerando $y = 2x\,\mathrm{sen}(2x) + \cos(2x)$ e seu gráfico ao lado:
[A](0.6pt) obtenha a equação da reta tangente ao gráfico no ponto $P(\frac{\pi}{2}, -1)$, marcado no gráfico

[B](0.6pt) obtenha a equação das retas tracejadas (R_1 e R_2), bem como os respectivos pontos de tangência



Solução: [A] $\dfrac{dy}{dx} = 2\sin(2x) + 2x(2)\cos(2x) - 2\sin(2x) = 4x\cos(2x)$

no ponto $P\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$ temos $\frac{dy}{dx} = 2\pi\cos(\pi) = -2\pi$ portanto a reta tangente nesse ponto tem equação $y + 1 = -2\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

[B] pontos de tangência horizontal satisfazem $4x\cos(2x) = 0$

reta R1: $2x = \pm\frac{\pi}{2}$ então $x = \pm\frac{\pi}{4}$ são abscissas do ponto de tangência, para os quais $y = \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)(\pm 1) + 0 = \frac{\pi}{2}$

reta R2: $2x = \pm\frac{3\pi}{2}$ então $x = \pm\frac{3\pi}{4}$ são abscissas do ponto de tangência, para os quais $y = \left(\pm\frac{3\pi}{2}\right)(\mp 1) + 0 = -\frac{3\pi}{2}$

Q4. ESCOLHA UM DOS PROBLEMAS

[A](1.2pt) Obtenha as equações das retas tangentes horizontais, e as verticais, a curva $xy^2 + x^2y = 2$, ou justifique que não existem.

[B](1.2pt) Obtenha a equação de uma reta que é tangente ao gráfico de $y = \frac{4}{1+x^2}$ e que passa pelo ponto $P(2, 0)$, ou justifique que tal reta não existe.

Solução: (a) derivando em relação a x:
$y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x(x+2y)\frac{dy}{dx} = -y(y+2x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y(2x+y)}{x(x+2y)}$

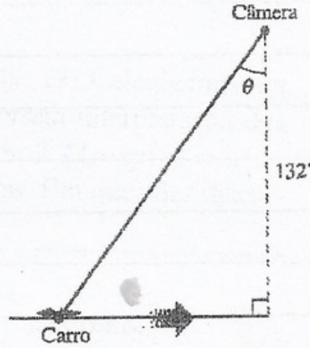
tangentes horizontais: $\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow y = -2x$ ou $y = 0$. Mas $y = 0$ não produz pontos na curva então resta $2 = x(-2x)^2 + x^2(-2x) = 2x^3$ e temos $x = 1$, $y = -2(1) = -2$, então $y = -2$ é reta tangente horizontal

tangentes verticais: $\frac{dx}{dy} = 0 \Leftrightarrow x = -2y$ ou $x = 0$. Mas $x = 0$ não produz pontos na curva então resta $2 = (-2y)y^2 + (-2y)^2y = 2y^3$ e temos $y = 1$, $x = -2(1) = -2$, e assim $x = -2$ é reta tangente vertical

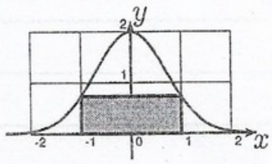
Solução: (b) $f = \frac{4}{1+x^2} \Rightarrow f' = \frac{-4(2x)}{(1+x^2)^2}$ então $y - \frac{4}{1+x_0^2} = \frac{-8x_0}{(1+x_0^2)^2}(x - x_0)$
é a equação do feixe de retas tangentes em pontos $P(x_0, f(x_0))$, passa por $P(2, 0)$:
$0 - \frac{4}{1+x_0^2} = \frac{-8x_0}{(1+x_0^2)^2}(2 - x_0)$
$\Leftrightarrow 1 + x_0^2 = 2x_0(2 - x_0) \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}$
uma possibilidade é $x_0 = 1$, que corresponde a reta $y - 2 = -2(x - 1)$ ou seja $y = 4 - 2x$

Q5. ESCOLHA DOIS DOS PROBLEMAS

[A](1.4pt) Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de 600 cm^3. O material usado para confeccionar a tampa e a base da caixa custa 3 reais por cm^2 e o material usado nas laterais custa 5 reais por cm^2. Determine o custo como função de alguma dimensão da caixa; explicite o domínio; depois calcule as dimensões da caixa de menor custo.



[B](1.4pt) Você está filmando uma corrida de um lugar a 132 pés de distância da pista, seguindo um carro que se desloca a 264 pés/s. Quando o carro estiver exatamente na sua frente, a que velocidade o ângulo θ de sua câmera variará (qual sua unidade) ?



[C](1.4pt) Dentre todos os retângulos com base sobre o eixo das abscissas, e limitados superiormente pela curva $y = 2e^{-x^2}$, encontre as dimensões daquele que tem área máxima, e obtenha tal área máxima.

Solução:[A] base é quadrado de lado x, altura h

$$\begin{cases} V = x^2 h = 600 \\ C = 2x^2(3) + 4xh(5) = 6x^2 + 20x \cdot \frac{600}{x^2} \end{cases} \text{ implica } C(x) = 6x^2 + \frac{12000}{x}, x > 0$$

$$0 = \frac{dC}{dx} = 12x - \frac{12000}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10, h = \frac{600}{100} = 6$$

uma vez que $\frac{dC}{dx} = \frac{12(x^3-1000)}{x^2}$ fica claro que a derivada troca de sinal, de negativo para positivo em $x = 10$, portanto é ponto de mínimo local e também absoluto de $C(x)$. A caixa de menor custo tem uma base quadrada de aresta $x = 10$cm e uma altura $h = 6$cm.

Solução:[B] seja $x(t)$ a posição do carro sobre o lado oposto do triângulo da figura,

$$\tan\theta = \frac{x}{132} \Leftrightarrow x = 132\tan\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 132\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

portanto, quando $\theta = 0$, temos $-264 = 132\sec^2(0)\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -2$ radianos por segundo

Solução: [C] cada retângulo tem base de dimensão $2x$ e altura de dimensão $2e^{-x^2}$ portanto $A(x) = 4xe^{-x^2}, x > 0$ denota sua área.

$$\frac{dA}{dx} = 4e^{-x^2} + 4x(-2x)e^{-x^2} = 4(1-2x^2)e^{-x^2}$$

portanto $\frac{dA}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

pela última expressão de $\frac{dA}{dx}$ vemos que troca de sinal, de positivo para negativo, em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, portanto temos um ponto de máximo local que também é absoluto em $(0, \infty)$.

Base do retângulo de maior área: $b = 2x = \sqrt{2}$, $h = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$, área $A = 2\sqrt{2/e}$

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
Recuperação Geral - turma B2 - 2023/2

Nome: GABARITO **Cartão:**

Instruções: (1) Esta prova tem duração de 100min. Você pode escrever à lapis. (2) Calculadoras ou qualquer outra forma de ajuda computacional não podem ser usadas. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) número de Euler $= e \approx 2.72$, $\exp(x) = e^x$.

AVISO: Em questões alternativas, marque apenas 1, sem necessidade de justificar. Em questões discursivas, a ausência de justificativa(s) será penalizada.

Q1. Assinale a afirmação correta sobre o limite.

[A](0.6pt) Sobre $\lim_{x\to\pi} \frac{\text{sen}(x)}{3x}$ é correto:

(X) é igual a 0
( ) é igual a -1
( ) é igual a $\frac{1}{3}$
( ) não existe
( ) é igual a 1
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): $f(x) = \frac{\sin(x)}{3x}$ é contínua em $x = \pi$, e $\sin(\pi) = 0$ implicam que o limite é nulo

[B](0.6pt) sobre $\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{1-x}$ é correto:

( ) é igual a 1
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
(X) é igual a -1
( ) é igual a $-\infty$
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): $\lim_{x\to 1^-} \ln(x) = 0$; $\lim_{x\to 1^-} 1 - x = 0$
podemos aplicar L'Hopital, que produz
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{x} = -1$$

[C](0.6pt) sobre $\lim_{x\to 1+} \frac{x^5 - x^3}{1-x^2}$ é correto:

( ) não existe
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a 1
( ) é igual a $-\infty$
(X) nenhuma das anteriores está correta

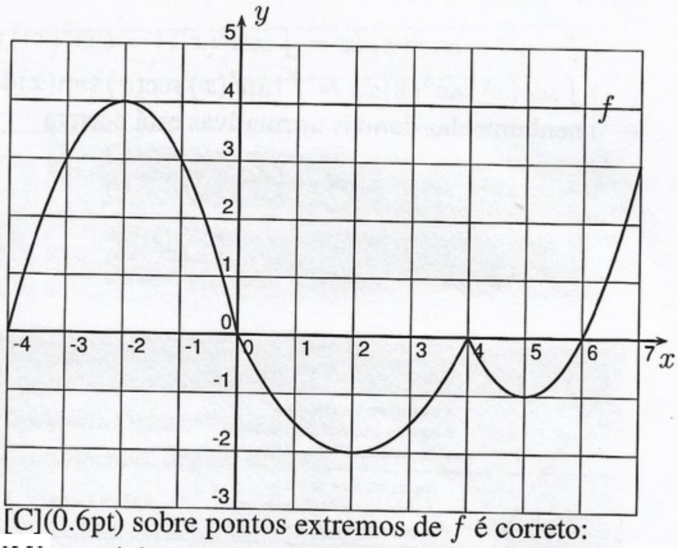
(S): $\frac{x^5-x^3}{1-x^2} = \frac{-x^2(1-x^2)}{1-x^2} = -x^2$, para $x \neq \pm 1$, portanto
$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^5 - x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to 1+} -x^2 = -1$$

[D](0.6pt) sobre $\lim_{x\to 1+} \frac{x}{1-x^3}$ é correto:

(X) é igual a $-\infty$
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a 1
(X) não existe
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): $\lim_{x\to 1^+} x = 1$; $\lim_{x\to 1^+} 1 - x^3 = 0$
este último via valores negativos, logo o quociente assume valores negativos ilimitados.

Q2. Considerando a função f representada ao lado:



[A](0.6pt) sobre pontos específicos de f, é correto:

( ) $x = 4$ é ponto de inflexão
( ) $x = -2$ é ponto de não diferenciabilidade
( ) $x = 0$ é ponto estacionário
(X) $x = 0$ é ponto de inflexão
( ) $x = 2$ é ponto de inflexão
( ) $x = 4$ é ponto estacionário
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): existe troca de concavidade em $x = 0$

[B](0.6pt) sobre a concavidade de f é correto:

( ) f é concava para baixo no intervalo $[0, 2]$
( ) f é concava para cima no intervalo $[-4, 4]$
(X) f é concava para cima no intervalo $[0, 6]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[0, 7]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[-2, 2]$
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): sempre voltada para cima no intervalo $[0, 6]$

[C](0.6pt) sobre pontos extremos de f é correto:

(X) $x = 4$ é ponto de máximo local
( ) $x = -2$ é ponto de mínimo local
( ) $x = 0$ é ponto de mínimo local
( ) $x = 2$ é ponto de máximo local
( ) $x = 6$ é ponto de máximo local
( ) nenhuma das anteriores está correta

(S): $x = 4$ é um ponto crítico onde sinal da derivada troca de positivo (a esq) para negativo

Q3. Escolha a alternativa apropriada: não há necessidade de justificar.

[A](0.6pt) Está correto:

( ) $\displaystyle\int \ln(x)dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{1}{2}\int x dx$, usando $\begin{cases} u = \ln(x) & ,du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & ,v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$ **X**

( ) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx = \frac{e^{-x^2}}{2} + \int \frac{e^{-x^2}}{2}dx$, usando $\begin{cases} u = x & ,du = dx \\ dv = e^{-x^2}dx & ,v = \frac{e^{-x^2}}{2} \end{cases}$ **X**

(X) $\displaystyle\int x^2\ln(x)dx = \frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx$, usando $\begin{cases} u = \ln(x) & ,du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2dx & ,v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

( ) $\displaystyle\int \text{sen}(x)e^{-x}dx = \text{sen}(x)e^{-x} - \int \cos(x)e^{-x}dx$, usando $\begin{cases} u = \text{sen}(x) & ,du = \cos(x)dx \\ dv = e^{-x}dx & ,v = e^{-x} \end{cases}$ **X**

( ) nenhuma das demais afirmativas está correta

[B](0.6pt) Sendo C um número real qualquer, está correto:

(X) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(\theta)2\cos(\theta)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)d\theta = 4\left[\frac{\text{sen}^3(\theta)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$, usando $x = 2\,\text{sen}(\theta)$ **ERRO**

( ) $\int \sqrt{1+x^2}dx = \int \sec(\theta)\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta = \int(1-x^2)xdx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$, usando $x = \tan(\theta)$ **ERRO**

( ) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{2\cos(\theta)d\theta}{\cos^2(\theta)} = 2\int \sec(\theta)d\theta = 2\ln|\cos(\theta)| + C = 2\ln\sqrt{1-x} + C$, usando $x = \text{sen}^2(\theta)$ **ERRO**

( ) $\int \sqrt{x - x^2}dx = \int(x^{1/2} - |x|)dx = \int(x^{1/2}+x)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} + C$, se $x \leq 0$ **ERRO**

( ) nenhuma das demais afirmativas está correta

[C](0.6pt) Sendo C um número real qualquer, está correto:

( ) $\int \text{sen}^4(x)dx = \text{sen}^3(x)\cos(x) - 3\int \text{sen}^2(x)(1-\text{sen}^2(x))dx \Rightarrow \int \text{sen}^4(x)dx = \frac{\text{sen}^3(x)\cos(x)}{4} - \frac{3}{4}\int \text{sen}^2(x)dx$, usando $\begin{cases} u = \text{sen}^3(x) & ,du = 3\,\text{sen}^2(x)\cos(x)dx \\ dv = \text{sen}(x)dx & ,v = \cos(x) \end{cases}$ **X**

( ) $\int \tan^2(x)dx = \tan^2(x)\sec(x) - \int \sec^3(x)\tan(x)dx$, usando $\begin{cases} u = \tan(x) & ,du = \sec^2(x)dx \\ dv = \tan(x)dx & ,v = \sec(x)\tan(x) \end{cases}$ **X**

(X) $\int \text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx = \int \text{sen}^2(x)(1-\text{sen}^2(x))\cos(x)dx = \frac{\text{sen}^3(x)}{3} - \frac{\text{sen}^5(x)}{5} + C$

( ) $\int \sec(x)\tan^3(x)dx = \int \tan^2(x)\sec(x)\tan(x)dx = \frac{\tan^3(x)}{3} + C$ **X**

( ) nenhuma das demais afirmativas está correta

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

$$\int \text{tg}^n x\,dx = \frac{\text{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int \text{tg}^{n-2}x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\text{sen}\,x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2}x\,\text{tg}\,x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx$$

$\int \text{sen}^m x\cos^n x\,dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n ímpar	• Separe um fator de $\cos x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \text{sen}\,x$	$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$
m ímpar	• Separe um fator de $\text{sen}\,x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \cos x$	$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ par}\end{cases}$	• Use a identidade relevante para reduzir as potências de $\text{sen}\,x$ e $\cos x$	$\begin{cases}\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\end{cases}$

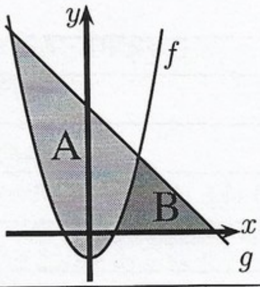
$\int \text{tg}^m x\sec^n x\,dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n par	• Separe um fator de $\sec^2 x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \text{tg}\,x$	$\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1$
m ímpar	• Separe um fator de $\sec x\,\text{tg}\,x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \sec x$	$\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ ímpar}\end{cases}$	• Use a identidade relevante para reduzir o integrando a potências somente de $\sec x$ • Agora use a fórmula de redução para potências de $\sec x$	$\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

NO INTEGRANDO	SUBSTITUIÇÃO	RESTRIÇÃO SOBRE θ	SIMPLIFICAÇÃO
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,\text{sen}\,\theta$	$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$	$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\text{sen}^2\theta = a^2\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\,\text{tg}\,\theta$	$-\pi/2 < \theta < \pi/2$	$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\text{tg}^2\theta = a^2\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\begin{cases}0 \leq \theta < \pi/2 & (\text{se } x \geq a) \\ \pi/2 < \theta \leq \pi & (\text{se } x \leq -a)\end{cases}$	$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2\text{tg}^2\theta$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\text{sen}(x)\,\text{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\text{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)}{2}$

Bom trabalho.



Q4. Na figura ao lado estão representados os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 5 - x$.
[A](0.5pt) Calcule a área da região A
[B](0.5pt) Calcule a área da região B

Solução: [A] intersecção: $x^2 - 1 = 5 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 0$ corresponde a $x = -3$ e a $x = 2$. Portanto

$$A = \int_{-3}^{2} (5 - x - x^2 + 1)dx = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)dx = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2} =$$
$$6(2+3) - \frac{1}{2}(4-9) - \frac{1}{3}(8+27) = 30 + \frac{5}{2} - \frac{35}{3} = \frac{125}{6}$$

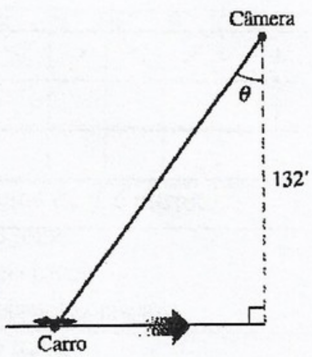
ainda

$$B = \int_{1}^{2} (x^2 - 1)dx + \int_{2}^{5} (5 - x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} + \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_{2}^{5} = \frac{7}{3} - 1 + 15 - \frac{21}{2} = \frac{35}{6}$$

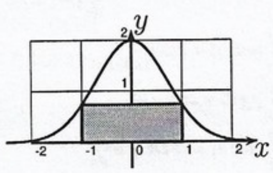
Q5. ESCOLHA DOIS DOS PROBLEMAS ABAIXO

[A](1.5pt) Obtenha $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2(x+2)^2}dx$

[B](1.5pt) Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de 600 cm^3. O material usado para confeccionar a tampa e a base da caixa custa 3 reais por cm^2 e o material usado nas laterais custa 5 reais por cm^2. Determine o custo como função de alguma dimensão da caixa; explicite o domínio; depois calcule as dimensões da caixa de menor custo.



[C](1.5pt) Você está filmando uma corrida de um lugar a 132 pés de distância da pista, seguindo um carro que se desloca a 264 pés/s. Quando o carro estiver exatamente na sua frente, a que velocidade o ângulo θ de sua câmera variará (qual sua unidade) ?



[D](1.5pt) Dentre todos os retângulos com base sobre o eixo das abscissas, e limitados superiormente pela curva $y = 2e^{-x^2}$, encontre as dimensões daquele que tem área máxima, e obtenha tal área máxima.

Solução: decomposição em frações parciais

$$\frac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

equivale a $x+1 = (A+C)x^3 + (4A+B+2C+D)x^2 + (4A+4B)x + 4B$ para todo x

$$\begin{cases} 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4} \\ 4A+4B = 1 \Rightarrow A = 0 \\ A+C = 0 \Rightarrow C = 0 \\ 4A+B+2C+D = 0 \Rightarrow D = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{x^2(x+2)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x^2} - \frac{\frac{1}{4}}{(x+2)^2}$$

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x^2(x+2)^2}dx = \left[-\frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2}\right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{5}{48}$$

Solução:[B] base é quadrado de lado x, altura h

$$\begin{cases} V = x^2h = 600 \\ C = 2x^2(3) + 4xh(5) = 6x^2 + 20x \cdot \frac{600}{x^2} \end{cases} \text{ implica } C(x) = 6x^2 + \frac{12000}{x}, x > 0$$

$$0 = \frac{dC}{dx} = 12x - \frac{12000}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10, h = \frac{600}{100} = 6$$

uma vez que $\frac{dC}{dx} = \frac{12(x^3-1000)}{x^2}$ fica claro que a derivada troca de sinal, de negativo para positivo em $x = 10$, portanto é ponto de mínimo local e também absoluto de $C(x)$. A caixa de menor custo tem uma base quadrada de aresta $x = 10$cm e uma altura $h = 6$cm.

Solução:[C] seja $x(t)$ a posição do carro sobre o lado oposto do triângulo da figura,

$$\tan\theta = \frac{x}{132} \Leftrightarrow x = 132\tan\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 132\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

portanto, quando $\theta = 0$, temos $-264 = 132\sec^2(0)\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -2$ radianos por segundo

Solução: [D] cada retângulo tem base de dimensão $2x$ e altura de dimensão $2e^{-x^2}$ portanto $A(x) = 4xe^{-x^2}, x > 0$ denota sua área.

$$\frac{dA}{dx} = 4e^{-x^2} + 4x(-2x)e^{-x^2} = 4(1-2x^2)e^{-x^2}$$

portanto $\frac{dA}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

pela última expressão de $\frac{dA}{dx}$ vemos que troca de sinal, de positivo para negativo, em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, portanto temos um ponto de máximo local que também é absoluto em $(0, \infty)$.

Base do retângulo de maior área: $b = 2x = \sqrt{2}$, $h = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$, área $A = 2\sqrt{2/e}$

FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[u^r] = ru^{r-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}\, u] = \cos u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\text{sen}\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg}\, u] = \sec^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cotg}\, u] = -\text{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u\, \text{tg}\, u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cossec}\, u] = -\text{cossec}\, u\, \text{cotg}\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cos}\, u] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc tg}\, u] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cotg}\, u] = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sec}\, u] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cossec}\, u] = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$