Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
TESTE 1 - turma B2 - 2023/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Esse teste tem duração de 50min. Você pode escrever à lapis. (2) Calculadoras ou qualquer outra forma de ajuda computacional não podem ser usadas. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) número de Euler $= e \approx 2.72$, $\exp(x) = e^x$.

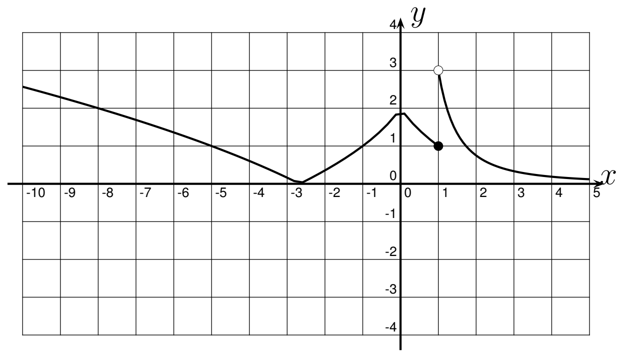
Pontuação: Cada questão vale 0.6pt. Em questões alternativas, marque apenas 1, sem necessidade de justificar. Em questões discursivas, a ausência de justificativa(s) será penalizada.

Q1. Sobre o domínio natural D_n de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{3}{2}}$ é correto:
( ) $D_n = \mathbb{R}$
( ) D_n é o intervalo $[0, 2]$
( ) D_n é o intervalo $(0, 2)$
( ) D_n é o intervalo $[2, \infty)$
( ) D_n é o intervalo $[0, \infty)$
( ) nenhuma das demais alternativas está correta

Q2. Ao lado está representado o gráfico da função

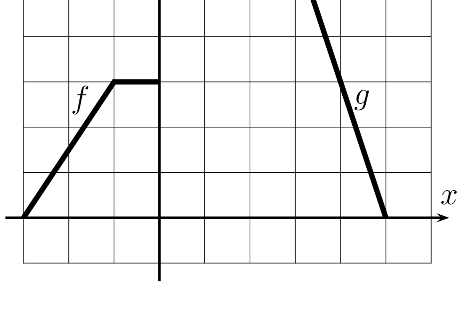
$$f(x) = \begin{cases} \left|3 - \sqrt{1+3|x|}\right| & , x \leq 1 \\ \frac{3}{x^2} & , x > 1 \end{cases}$$

no intervalo $[-10, 5]$. É correto:



( ) $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe
( ) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$
( ) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ não existe
( ) $\lim_{x\to -8} f(x) = 2$
( ) f é contínua em $x = 1$, apesar de $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existir
( ) nenhuma das demais alternativas está correta

Q3. Ao lado estão representados o gráficos de funções f e g, bem como os eixos coordenados. É correto:



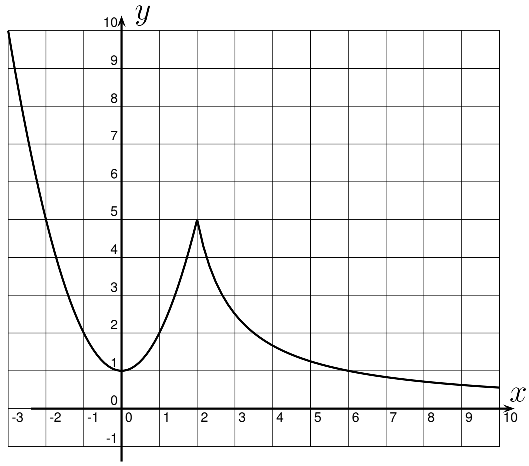
( ) $g(x) = 2f(x-2)$
( ) $g(x) = f(2x+2)$
( ) $g(x) = 2f(2-x)$
( ) $g(x) = 2 - 2f(-x)$
( ) $g(x) = 2f(-x-2)$
( ) nenhuma das demais alternativas está correta

Questões discursivas no verso.

Q4. Ao lado temos o gráfico de

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , -3 \leq x \leq 2 \\ \frac{5}{x-1} & , 2 < x \leq 10 \end{cases}.$$

Obtenha expressão analítica e domínio da função inversa g de f, sob restrição $x = g(y), -3 \leq x \leq 0$, ou justifique que não existe(m).



Q5. Obtenha, usando técnicas trabalhadas em aula, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{6x^2+1}}{x}$

Bom Trabalho.

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
Prova 1 - turma B2 - 2023/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Esta prova tem duração de 100min. Você pode escrever à lapis. (2) Calculadoras ou qualquer outra forma de ajuda computacional não podem ser usadas. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) número de Euler $= e \approx 2.72$, $\exp(x) = e^x$.

AVISO: Em questões alternativas, marque apenas 1, sem necessidade de justificar. Em questões discursivas, a ausência de justificativa(s) será penalizada.

Q1. Considere $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

[A](0.6pt) Sobre o gráfico de f é correto:

( ) não possui assíntotas horizontais
( ) $x = 1$ é a única assíntota vertical
( ) $x = -1$ é uma assíntota horizontal
( ) $x = -2$ é a única assíntota vertical
( ) $x = 1$ e $x = -2$ são assíntotas verticais
( ) nenhuma das anteriores está correta

[B](0.6pt) sobre a derivada de f em $x = 0$ é correto:

( ) $f'(0) = -1/4$
( ) $f'(0) = -3/4$
( ) $f'(0) = 0$
( ) $f'(0) = 1/2$
( ) não existe
( ) nenhuma das anteriores está correta

[C](0.6pt) Sobre F tal que $F'(x) = f(x)$, e o interior H do conjunto onde F é crescente, é correto:

( ) $H = (-\infty, -2) \bigcup (-1, \infty)$
( ) $H = (-2, -1) \bigcup (1, \infty)$
( ) $H = (-1, 1)$
( ) $H = (-2, -1)$
( ) $H = (-\infty, -2) \bigcup (-1, 1)$
( ) nenhuma das anteriores está correta

Q2. Considere $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} - \cos(x)}{x} & , x > 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{|x|} & , x < 0 \end{cases}$

[A](0.6pt) É correto:

( ) f é contínua em $x = 0$ pois é derivável neste ponto
( ) f não é contínua em $x = 0$, mas $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe
( ) f não é contínua em $x = 0$, pois $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe
( ) f é contínua em $x = 0$, apesar de não estar definida em $x = 0$
( ) f possui descontinuidade de salto infinito em $x = 0$
( ) nenhuma das anteriores está correta

[B](0.6pt) É correto:

( ) $f'(\pi) = -\dfrac{(\pi+1)e^{-\pi}+1}{\pi^2}$
( ) $f'(\pi) = -\dfrac{1}{\pi}$
( ) $f'(\pi) = \dfrac{(-\pi+1)e^{-\pi}+1}{\pi^2}$
( ) $f'(\pi) = -1$
( ) $f'(\pi) = \dfrac{1}{\pi^2}$
( ) nenhuma das anteriores está correta

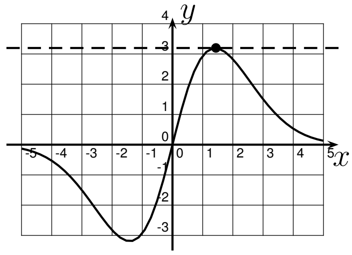
[C](0.6pt) É correto:

( ) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{xe^x} - \frac{\cos(x)}{x}\right) = 0$
( ) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}+\operatorname{sen}(x)}{1} = 1$
( ) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}+\operatorname{sen}(x)}{1} = 0$
( ) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{xe^x} - \frac{\cos(x)}{x}\right) = 0$
( ) nenhuma das anteriores está correta

Q3. Considerando $y = \dfrac{5xe^{-\frac{x^2}{6}}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$ e seu gráfico ao lado

(a)(0.5pt) obtenha $\frac{dy}{dx}$ usando diferenciação logarítmica

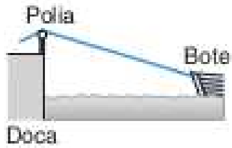
(b)(0.5pt) obtenha a equação da reta tracejada, e o ponto de tangência



Q4.(1.0pt) Obtenha máximos e mínimos absolutos de $f(x) = (x^2 + x)^{\frac{2}{3}}$ no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Q5. [A](0.7pt) Uma partícula move-se no plano cartesiano ao longo de uma curva cuja equação é $y = \sqrt{x^3 + 17}$. Quando está em $P(2, 5)$, sua ordenada y está decrescendo a uma taxa de 2 unidades por segundo. Com que rapidez sua abscissa x está variando nesse momento ?

[B](0.7pt) Um bote é puxado para uma doca por meio de uma corda ligada a uma polia na doca (figura ao lado). A corda está ligada à proa do bote em um ponto que se mantém 3 metros abaixo da polia. Com que rapidez a corda deve ser puxada se quisermos que o bote se aproxime da doca a uma taxa de 2 metros/min, no instante em que a distância do bote (à base da doca) é de 20 metros ?



FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[u^r] = ru^{r-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} u] = \cos u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg} u] = \sec^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{cotg} u] = -\operatorname{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u \operatorname{tg} u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{cossec} u] = -\operatorname{cossec} u \operatorname{cotg} u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc\,sen} u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arc\,cos} u] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc\,tg} u] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arc\,cotg} u] = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arc\,sec} u] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arc\,cossec} u] = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

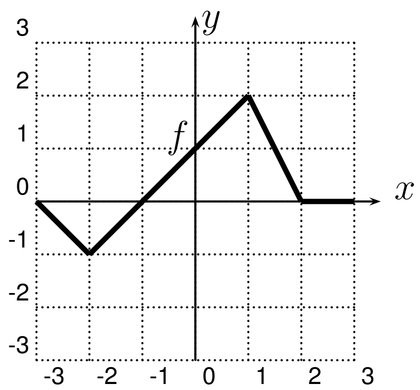
Bom trabalho.

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
TESTE 2 - turma B2 - 2023/2

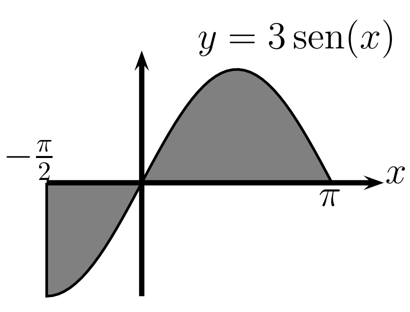
Nome: **Cartão:**
Instruções: (1) Esse teste tem duração de 50min. Você pode escrever à lapis. (2) Calculadoras ou qualquer outra forma de ajuda computacional não podem ser usadas. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) número de Euler $= e \approx 2.72$, $\exp(x) = e^x$.
Pontuação: Cada questão vale 0.6pt. Em questões alternativas, marque apenas 1, sem necessidade de justificar. Em questões discursivas, a ausência de justificativa(s) será penalizada.

Q1. O Teorema da Diferença Constante estabelece que se $f' = g'$ em algum intervalo I, então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ em I. Sabendo que $g(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$ e que $y(x)$ satisfaz $\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx}$ em $I = [1, \infty)$ e $y(1) = 1$, é correto:
( ) $y(4) = \frac{17}{8}$
( ) $y(4) = 5$
( ) $y(4) = \frac{15}{8}$
( ) $y(4) = 2$
( ) $y(4) = 8$
( ) nenhuma das anteriores está correta

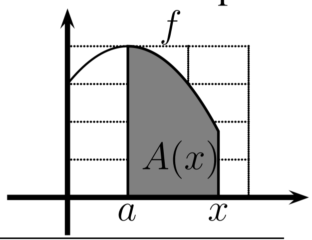
Q2. Considerando a função f representada no gráfico ao lado, é correto:
( ) $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)dx = -1$
( ) $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)dx = 3$
( ) $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)dx = 1$
( ) $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)dx = \frac{5}{2}$
( ) nenhuma das anteriores está correta



Q3. Sobre a área A da região cinzenta no gráfico ao lado, é correto:
( ) $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 3\cos(x)dx - \int_{0}^{\pi} 3\cos(x)dx$
( ) $A = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 3\cos(x)dx + \int_{0}^{\pi} 3\cos(x)dx$
( ) $A = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\operatorname{sen}(x)|dx$
( ) $A = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{sen}(x)dx - 3\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx$
( ) $A = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}|x|dx$
( ) nenhuma das anteriores está correta



Q4. Dada uma função f não-negativa em um intervalo $[a, b]$, seja $A(x)$ a função que associa x, para $a \leq x \leq b$, com a área da região acima do intervalo $[a, x]$ que é limitada pelo gráfico de f (região sombreada na figura ao lado). O método da Antiderivada para determinar $A(x)$ usa a conhecida propriedade que $\frac{dA}{dx} = f$.



(a)(0.4pt) Obtenha $A(x)$ para $f = 3 + 2x - x^2$ e $[a, b] = [1, 3]$ usando o método da Antiderivada.

(b)(0.2pt) Avalie sua resposta $A(x)$ da parte (a) para $x = 3$.

Q5. Obtenha $\displaystyle\int x\sqrt{1 + 2x^2}\, dx$

Bom Trabalho

FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[u^r] = ru^{r-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}\, u] = \cos u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\text{sen}\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg}\, u] = \sec^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cotg}\, u] = -\text{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u\, \text{tg}\, u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cossec}\, u] = -\text{cossec}\, u\, \text{cotg}\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cos}\, u] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc tg}\, u] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cotg}\, u] = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sec}\, u] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cossec}\, u] = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
Prova 2 - turma B2 - 2023/2

Nome: **Cartão:**
Instruções: (1) Esta prova tem duração de 100min. Você pode escrever à lapis. (2) Calculadoras ou qualquer outra forma de ajuda computacional não podem ser usadas. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) número de Euler $= e \approx 2.72$, $\exp(x) = e^x$.
AVISO: Em questões alternativas, marque apenas 1, sem necessidade de justificar. Em questões discursivas, a ausência de justificativa(s) será penalizada.

Q1.(0.8pt) Sobre $I = \displaystyle\int_0^2 xe^{-x^2}dx$ é correto:
( ) $I = \frac{1-e^4}{e^4}$
( ) $I = \frac{1-e^{-4}}{2}$
( ) $I = \frac{1-e^{-2}}{2}$
( ) $I = 1 - e^{-2}$
( ) nenhuma das demais alternativas está correta

Q2.(0.8pt) É correto que a técnica de substituição $u = \text{sen}(x)$ transforma $\displaystyle\int \text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$ em:
( ) $\displaystyle\int u^2(1-u^2)^{3/2}du$
( ) $\displaystyle\int u^2(1-u^3)du$
( ) $\displaystyle\int u^2(1-u)^2du$
( ) $\displaystyle\int u^2(1-u^2)du$
( ) nenhuma das demais alternativas

Q3.(0.8pt) Uma torneira industrial de fechamento automático, quando acionada, dispensa líquido por exatamente 8 segundos, a uma taxa (vazão) $v(t) = 2 - t^{\frac{1}{3}}$ litros por segundo, onde t é o tempo transcorrido. Sobre a quantidade Q de líquido dispensado, é correto:
( ) $Q = 4$ litros
( ) $Q = 2$ litros
( ) $Q = \frac{15}{4}$ litros
( ) $Q = \frac{17}{4}$ litros
( ) $Q = \frac{13}{4}$ litros
( ) nenhuma das demais alternativas está correta

Q4.(0.8pt) É correto que substituição trigonométrica, que usa $x = \tan(u)$, transforma $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ em:
( ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2(u)du$
( ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2(u)du$
( ) $\displaystyle\int_0^{\pi} \tan^2(u)du$
( ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2(u)du$
( ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(u)du$
( ) nenhuma das demais alternativas

Q5.(A)(0.8pt) Obtenha $\int_0^1 (1-x^3)(2-x)dx$

Q5.(B) (1.0pt) Obtenha $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

Q6. (1.0pt) ESCOLHA 1 DOS PROBLEMAS ABAIXO

(A) Obtenha $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{x^2(4+x^2)}dx$ (B) Obtenha $\displaystyle\int x^2\cos(2x)dx$

FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[u^r] = ru^{r-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}\, u] = \cos u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\text{sen}\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg}\, u] = \sec^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cotg}\, u] = -\text{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$$

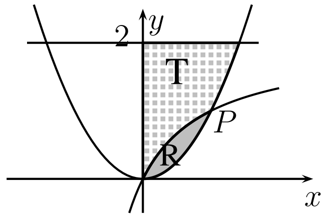
$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u\, \text{tg}\, u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cossec}\, u] = -\text{cossec}\, u\, \text{cotg}\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cos}\, u] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc tg}\, u] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cotg}\, u] = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sec}\, u] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cossec}\, u] = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

Q7. Ao lado temos os gráficos de $y = x^2$ e $y = 2 - \frac{2}{x+1}$ os quais, juntamente com o eixo y e a reta $y = 2$, delimitam as regiões hachuradas R e T cujos interiores são disjuntos.



(a)(0.2pt) Encontre as coordenadas do ponto de intersecção P.

(b)(0.8pt) Calcule a área da região R.

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

$$\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$$

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx$$

$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n ímpar	• Separe um fator de $\cos x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \operatorname{sen} x$	$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
m ímpar	• Separe um fator de $\operatorname{sen} x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \cos x$	$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ par} \end{cases}$	• Use a identidade relevante para reduzir as potências de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$	$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{cases}$

$\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\, dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n par	• Separe um fator de $\sec^2 x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \operatorname{tg} x$	$\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$
m ímpar	• Separe um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \sec x$	$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ ímpar} \end{cases}$	• Use a identidade relevante para reduzir o integrando a potências somente de $\sec x$ • Agora use a fórmula de redução para potências de $\sec x$	$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

NO INTEGRANDO	SUBSTITUIÇÃO	RESTRIÇÃO SOBRE θ	SIMPLIFICAÇÃO
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$	$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$	$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta = a^2 \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta$	$-\pi/2 < \theta < \pi/2$	$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta = a^2 \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\begin{cases} 0 \le \theta < \pi/2 & (\text{se } x \ge a) \\ \pi/2 < \theta \le \pi & (\text{se } x \le -a) \end{cases}$	$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2}$

Bom trabalho.

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
Recuperação 1 - turma B2 - 2023/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Esta prova tem duração de 100min. Você pode escrever à lapis. (2) Calculadoras ou qualquer outra forma de ajuda computacional não podem ser usadas. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) número de Euler $= e \approx 2.72$, $\exp(x) = e^x$.
AVISO: Em questões alternativas, marque apenas 1, sem necessidade de justificar. Em questões discursivas, a ausência de justificativa(s) será penalizada.

Q1. Assinale a afirmação correta sobre o limite.

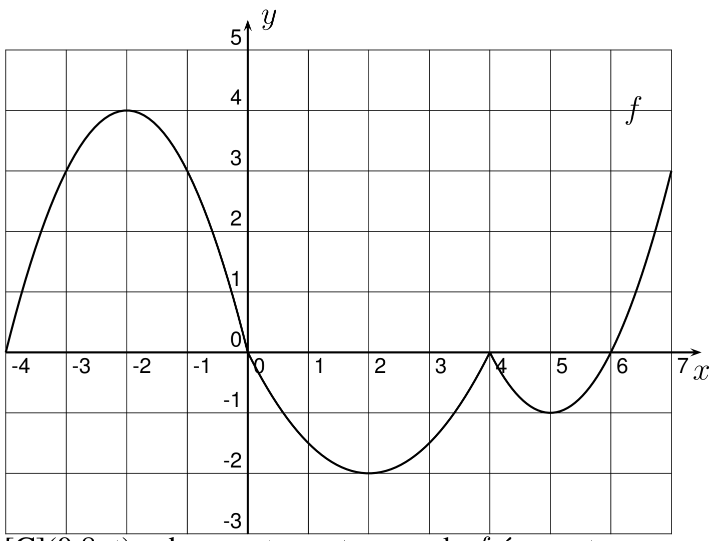
[A](0.6pt) Sobre $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\text{sen}(x)}{3x}$ é correto:
( ) é igual a -1
( ) não existe
( ) é igual a 0
( ) é igual a 1
( ) é igual a $\frac{1}{3}$
( ) nenhuma das anteriores está correta

[B](0.6pt) sobre $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ é correto:
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a -1
( ) é igual a 1
( ) é igual a $-\infty$
( ) nenhuma das anteriores está correta

[C](0.6pt) sobre $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^5 - x^3}{1-x^2}$ é correto:
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a 1
( ) é igual a $-\infty$
( ) não existe
( ) nenhuma das anteriores está correta

[D](0.6pt) sobre $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{1-x^3}$ é correto:
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a 1
( ) é igual a $-\infty$
( ) não existe
( ) nenhuma das anteriores está correta

Q2. Considerando a função f representada ao lado:

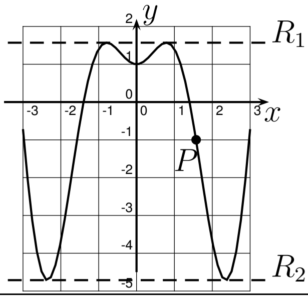


[A](0.8pt) sobre pontos específicos de f, é correto:
( ) $x = -2$ é ponto de não diferenciabilidade
( ) $x = 0$ é ponto estacionário
( ) $x = 0$ é ponto de inflexão
( ) $x = 2$ é ponto de inflexão
( ) $x = 4$ é ponto estacionário
( ) $x = 4$ é ponto de inflexão
( ) nenhuma das anteriores está correta

[B](0.8pt) sobre a concavidade de f é correto:
( ) f é concava para cima no intervalo $[-4, 4]$
( ) f é concava para cima no intervalo $[0, 6]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[0, 7]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[-2, 2]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[0, 2]$
( ) nenhuma das anteriores está correta

[C](0.8pt) sobre pontos extremos de f é correto:
( ) $x = -2$ é ponto de mínimo local
( ) $x = 0$ é ponto de mínimo local
( ) $x = 2$ é ponto de máximo local
( ) $x = 4$ é ponto de máximo local
( ) $x = 6$ é ponto de máximo local
( ) nenhuma das anteriores está correta

Q3. Considerando $y = 2x\,\mathrm{sen}(2x) + \cos(2x)$ e seu gráfico ao lado:



[A](0.6pt) obtenha a equação da reta tangente ao gráfico no ponto $P(\frac{\pi}{2}, -1)$, marcado no gráfico

[B](0.6pt) obtenha a equação das retas tracejadas (R_1 e R_2), bem como os respectivos pontos de tangência

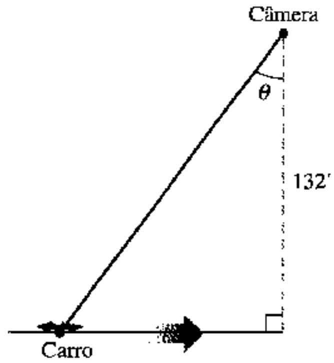
Q4. ESCOLHA UM DOS PROBLEMAS

[A](1.2pt) Obtenha as equações das retas tangentes horizontais, e as verticais, a curva $xy^2 + x^2y = 2$, ou justifique que não existem.

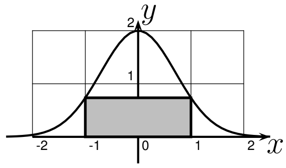
[B](1.2pt) Obtenha a equação de uma reta que é tangente ao gráfico de $y = \frac{4}{1+x^2}$ e que passa pelo ponto $P(2, 0)$, ou justifique que tal reta não existe.

Q5. ESCOLHA DOIS DOS PROBLEMAS

[A](1.4pt) Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de 600 cm^3. O material usado para confeccionar a tampa e a base da caixa custa 3 reais por cm^2 e o material usado nas laterais custa 5 reais por cm^2. Determine o custo como função de alguma dimensão da caixa; explicite o domínio; depois calcule as dimensões da caixa de menor custo.



[B](1.4pt) Você está filmando uma corrida de um lugar a 132 pés de distância da pista, seguindo um carro que se desloca a 264 pés/s. Quando o carro estiver exatamente na sua frente, a que velocidade o ângulo θ de sua câmera variará (qual sua unidade) ?



[C](1.4pt) Dentre todos os retângulos com base sobre o eixo das abscissas, e limitados superiormente pela curva $y = 2e^{-x^2}$, encontre as dimensões daquele que tem área máxima, e obtenha tal área máxima.

FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[u^r] = ru^{r-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}\, u] = \cos u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\text{sen}\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg}\, u] = \sec^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cotg}\, u] = -\text{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u\, \text{tg}\, u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cossec}\, u] = -\text{cossec}\, u\, \text{cotg}\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cos}\, u] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc tg}\, u] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cotg}\, u] = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sec}\, u] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cossec}\, u] = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

Bom trabalho.

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A - UFRGS
Recuperação Geral - turma B2 - 2023/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Esta prova tem duração de 100min. Você pode escrever à lapis. (2) Calculadoras ou qualquer outra forma de ajuda computacional não podem ser usadas. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) número de Euler $= e \approx 2.72$, $\exp(x) = e^x$.
AVISO: Em questões alternativas, marque apenas 1, sem necessidade de justificar. Em questões discursivas, a ausência de justificativa(s) será penalizada.

Q1. Assinale a afirmação correta sobre o limite.

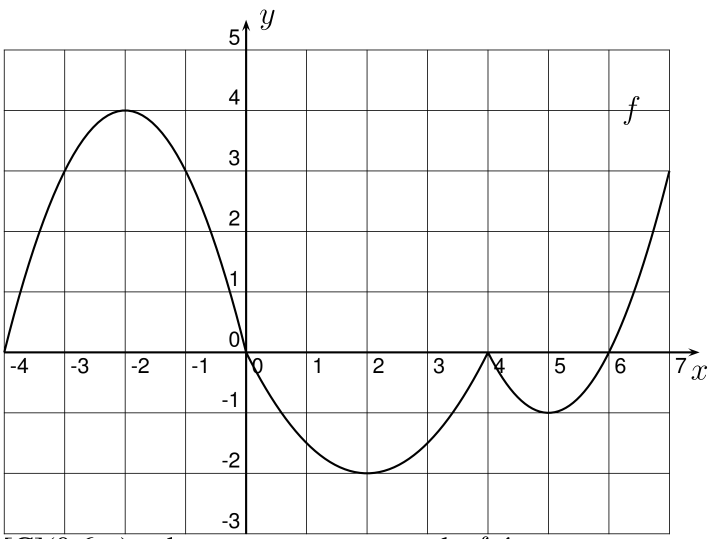
[A](0.6pt) Sobre $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\text{sen}(x)}{3x}$ é correto:
( ) é igual a 0
( ) é igual a -1
( ) é igual a $\frac{1}{3}$
( ) não existe
( ) é igual a 1
( ) nenhuma das anteriores está correta

[B](0.6pt) sobre $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ é correto:
( ) é igual a 1
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a -1
( ) é igual a $-\infty$
( ) nenhuma das anteriores está correta

[C](0.6pt) sobre $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^5-x^3}{1-x^2}$ é correto:
( ) não existe
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a 1
( ) é igual a $-\infty$
( ) nenhuma das anteriores está correta

[D](0.6pt) sobre $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x}{1-x^3}$ é correto:
( ) é igual a $-\infty$
( ) é igual a 0
( ) é igual a $+\infty$
( ) é igual a 1
( ) não existe
( ) nenhuma das anteriores está correta

Q2. Considerando a função f representada ao lado:



[A](0.6pt) sobre pontos específicos de f, é correto:
( ) $x = 4$ é ponto de inflexão
( ) $x = -2$ é ponto de não diferenciabilidade
( ) $x = 0$ é ponto estacionário
( ) $x = 0$ é ponto de inflexão
( ) $x = 2$ é ponto de inflexão
( ) $x = 4$ é ponto estacionário
( ) nenhuma das anteriores está correta

[B](0.6pt) sobre a concavidade de f é correto:
( ) f é concava para baixo no intervalo $[0, 2]$
( ) f é concava para cima no intervalo $[-4, 4]$
( ) f é concava para cima no intervalo $[0, 6]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[0, 7]$
( ) f é concava para baixo no intervalo $[-2, 2]$
( ) nenhuma das anteriores está correta

[C](0.6pt) sobre pontos extremos de f é correto:
( ) $x = 4$ é ponto de máximo local
( ) $x = -2$ é ponto de mínimo local
( ) $x = 0$ é ponto de mínimo local
( ) $x = 2$ é ponto de máximo local
( ) $x = 6$ é ponto de máximo local
( ) nenhuma das anteriores está correta

Q3. Escolha a alternativa apropriada: não há necessidade de justificar.

[A](0.6pt) Está correto:

( ) $\displaystyle\int \ln(x)dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{1}{2}\int x dx$, usando $\begin{cases} u = \ln(x) & , du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & , v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

( ) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx = \frac{e^{-x^2}}{2} + \int \frac{e^{-x^2}}{2}dx$, usando $\begin{cases} u = x & , du = dx \\ dv = e^{-x^2}dx & , v = \frac{e^{-x^2}}{2} \end{cases}$

( ) $\displaystyle\int x^2\ln(x)dx = \frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx$, usando $\begin{cases} u = \ln(x) & , du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2dx & , v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

( ) $\displaystyle\int \text{sen}(x)e^{-x}dx = \text{sen}(x)e^{-x} - \int \cos(x)e^{-x}dx$, usando $\begin{cases} u = \text{sen}(x) & , du = \cos(x)dx \\ dv = e^{-x}dx & , v = e^{-x} \end{cases}$

( ) nenhuma das demais afirmativas está correta

[B](0.6pt) Sendo C um número real qualquer, está correto:

( ) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(\theta)2\cos(\theta)d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)d\theta = 4\left[\frac{\text{sen}^3(\theta)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$, usando $x = 2\,\text{sen}(\theta)$

( ) $\int \sqrt{1+x^2}dx = \int \sec(\theta)\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta = \int (1-x^2)xdx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$, usando $x = \tan(\theta)$

( ) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{2\cos(\theta)d\theta}{\cos^2(\theta)} = 2\int \sec(\theta)d\theta = 2\ln|\cos(\theta)| + C = 2\ln\sqrt{1-x} + C$, usando $x = \text{sen}^2(\theta)$

( ) $\int \sqrt{x-x^2}dx = \int (x^{1/2} - |x|)dx = \int (x^{1/2} + x)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} + C$, se $x \leq 0$

( ) nenhuma das demais afirmativas está correta

[C](0.6pt) Sendo C um número real qualquer, está correto:

( ) $\int \text{sen}^4(x)dx = \text{sen}^3(x)\cos(x) - 3\int \text{sen}^2(x)(1-\text{sen}^2(x))dx \Rightarrow \int \text{sen}^4(x)dx = \frac{\text{sen}^3(x)\cos(x)}{4} - \frac{3}{4}\int \text{sen}^2(x)dx$, usando $\begin{cases} u = \text{sen}^3(x) & , du = 3\,\text{sen}^2(x)\cos(x)dx \\ dv = \text{sen}(x)dx & , v = \cos(x) \end{cases}$

( ) $\int \tan^2(x)dx = \tan^2(x)\sec(x) - \int \sec^3(x)\tan(x)dx$, usando $\begin{cases} u = \tan(x) & , du = \sec^2(x)dx \\ dv = \tan(x)dx & , v = \sec(x)\tan(x) \end{cases}$

( ) $\int \text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx = \int \text{sen}^2(x)(1-\text{sen}^2(x))\cos(x)dx = \frac{\text{sen}^3(x)}{3} - \frac{\text{sen}^5(x)}{5} + C$

( ) $\int \sec(x)\tan^3(x)dx = \int \tan^2(x)\sec(x)\tan(x)dx = \frac{\tan^3(x)}{3} + C$

( ) nenhuma das demais afirmativas está correta

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\,\text{sen}\, x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

$$\int \text{tg}^n x\,dx = \frac{\text{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \text{tg}^{n-2} x\,dx$$

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x\,\text{tg}\, x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$$

$\int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n ímpar	• Separe um fator de $\cos x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \text{sen}\, x$	$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$
m ímpar	• Separe um fator de $\text{sen}\, x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \cos x$	$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ par} \end{cases}$	• Use a identidade relevante para reduzir as potências de $\text{sen}\, x$ e $\cos x$	$\begin{cases} \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{cases}$

$\int \text{tg}^m x \sec^n x\,dx$	PROCEDIMENTO	IDENTIDADES RELEVANTES
n par	• Separe um fator de $\sec^2 x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \text{tg}\, x$	$\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1$
m ímpar	• Separe um fator de $\sec x\,\text{tg}\, x$ • Aplique a identidade relevante • Faça a substituição $u = \sec x$	$\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$
$\begin{cases} m \text{ par} \\ n \text{ ímpar} \end{cases}$	• Use a identidade relevante para reduzir o integrando a potências somente de $\sec x$ • Agora use a fórmula de redução para potências de $\sec x$	$\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

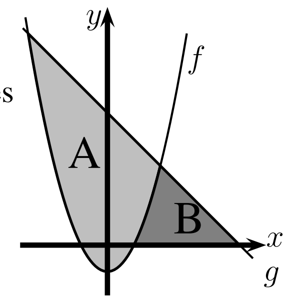
NO INTEGRANDO	SUBSTITUIÇÃO	RESTRIÇÃO SOBRE θ	SIMPLIFICAÇÃO
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\,\text{sen}\,\theta$	$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$	$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\text{sen}^2\theta = a^2\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\,\text{tg}\,\theta$	$-\pi/2 < \theta < \pi/2$	$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\text{tg}^2\theta = a^2\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\begin{cases} 0 \leq \theta < \pi/2 & (\text{se } x \geq a) \\ \pi/2 < \theta \leq \pi & (\text{se } x \leq -a) \end{cases}$	$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2\text{tg}^2\theta$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\text{sen}(x)\,\text{sen}(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$\text{sen}(x)\cos(y) = \frac{\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)}{2}$

Bom trabalho.

Q4. Na figura ao lado estão representados os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 5 - x$.



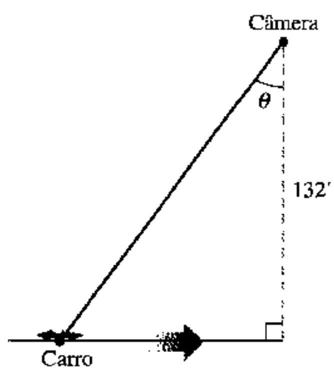
[A](0.5pt) Calcule a área da região A

[B](0.5pt) Calcule a área da região B

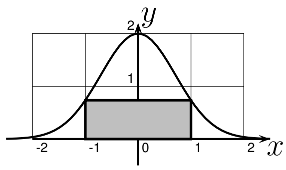
Q5. ESCOLHA DOIS DOS PROBLEMAS ABAIXO

[A](1.5pt) Obtenha $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2(x+2)^2}dx$

[B](1.5pt) Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de 600 cm^3. O material usado para confeccionar a tampa e a base da caixa custa 3 reais por cm^2 e o material usado nas laterais custa 5 reais por cm^2. Determine o custo como função de alguma dimensão da caixa; explicite o domínio; depois calcule as dimensões da caixa de menor custo.



[C](1.5pt) Você está filmando uma corrida de um lugar a 132 pés de distância da pista, seguindo um carro que se desloca a 264 pés/s. Quando o carro estiver exatamente na sua frente, a que velocidade o ângulo θ de sua câmera variará (qual sua unidade) ?



[D](1.5pt) Dentre todos os retângulos com base sobre o eixo das abscissas, e limitados superiormente pela curva $y = 2e^{-x^2}$, encontre as dimensões daquele que tem área máxima, e obtenha tal área máxima.

FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[u^r] = ru^{r-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } u] = \cos u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg } u] = \sec^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cotg } u] = -\text{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u \text{ tg } u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cossec } u] = -\text{cossec } u \text{ cotg } u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sen } u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cos } u] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc tg } u] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cotg } u] = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{arc sec } u] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{arc cossec } u] = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$