Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01191 - Vetores e Geometria Analítica
Recuperação Geral 2022/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Essa prova tem duração de 1h40min. (2) Calculadoras não podem ser usadas; você pode escrever e marcar à lapis. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação; leia atentamente. (4) Em qualquer das questões, a ausência de justificativa será penalizada.

Questão 1.(3.0pt) ESCOLHA e RESOLVA 2 ítems.

1.(a) Pontos A, B, C são não colineares e O é tal que $\overrightarrow{CO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BO}$. Calcule α e β tais que $\overrightarrow{AO}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.

1.(b) Sabendo que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são não-paralelos, que $\overrightarrow{OA}=4\vec{x}+2\vec{y}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{x}+3\vec{y}$, $\overrightarrow{OC}=\lambda\vec{x}-\vec{y}$, calcule λ para o qual os pontos A, B e C sejam colinares.

1.(c) Sabemos que A, B e C são três pontos não-colineares e que X, Y são pontos tais que $4\overrightarrow{AX}=5\overrightarrow{XB}$ e $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{YA}$. Escreva $\overrightarrow{XY}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$.

1.(d) Sejam $\vec{u}=(1,-2,1)$ e $\vec{v}=(4,-3,2)$. Decomponha $\vec{v}$ como soma de vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tais que $\vec{x}$ é paralelo $\vec{u}$ e $\vec{y}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

Solução:

(a) $\overrightarrow{CO}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO}+\dfrac{5}{2}\overrightarrow{BO}$ implica

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}+\frac{5}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}\right)$$
$$\left(1-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}-\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AO}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AO}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\text{ portanto }\alpha=\tfrac{5}{6},\ \beta=-\tfrac{1}{3}$$

(b) supondo que existe α tal que $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}$, temos

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\alpha\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\alpha\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)$$
$$2\vec{x}+3\vec{y}-(4\vec{x}+2\vec{y})=\alpha\,(\lambda\vec{x}-\vec{y}-4\vec{x}-2\vec{y})\Leftrightarrow -2\vec{x}+\vec{y}=\alpha(\lambda-4)\vec{x}-3\alpha\vec{y}$$

e igualando os coeficientes (pois $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são LI), temos $1=-3\alpha\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{3}$ e ainda $\alpha(\lambda-4)=-2\Rightarrow\lambda-4=(-2)(-3)\Rightarrow\lambda=10$.

(c) Enunciado implica A,B,X alinhados, também implica A,C,Y alinhados. A é o ponto comum. Escreve $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AY}$, portanto é CL de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{AX}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AX}=\frac{9}{5}\overrightarrow{AX}\Rightarrow\overrightarrow{AX}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{YA}\Rightarrow\overrightarrow{XY}=-\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{YA}=-\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

(d) $\vec{x}$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$:
$\alpha=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\dfrac{(4,-3,2)\cdot(1,-2,1)}{(1,-2,1)\cdot(1,-2,1)}=\dfrac{12}{6}=2$ portanto

$$\vec{x}=\alpha\vec{u}=(2,-4,2)\,,\ \vec{y}=\vec{v}-\vec{x}=(2,1,0)$$

Questão 2. Sejam $\overrightarrow{AB}=(1,-1,1), \overrightarrow{AC}=(2,3,1), \overrightarrow{AD}=(3,-1,2)$.

(a)(1.0pt) calcule a área do triângulo formado por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

(b)(1.0pt) calcule o volume da pirâmide triangular formada por esses 3 vetores.

Solução:

(a) produto vetorial: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-3)-\vec{j}(1-2)+\vec{k}(3+2) = (-4,1,5)$

área do triângulo $A = \dfrac{\sqrt{(-4)^2+(1)^2+(5)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{42}}{2}$

(b) produto misto: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(6+1)-(-1)(4-3)+(1)(-2-9) = 7+1-11 = -3$

volume da pirâmide triangular (tetraedro): $V = \frac{|-3|}{6} = \frac{1}{2}$

Questão 3. (a)(1.0pt) Encontre equações paramétricas da reta que é ortogonal ao plano $2x-3y-z=6$ e que passa pelo ponto $P(-1,-1,2)$. Encontre a distância entre o ponto P e tal plano.

(b)(1.0pt) Encontre equação cartesiana do plano determinado pela reta $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ e pelo ponto $Q(1,4,-2)$.

Solução:

(a) vetor diretor da reta é vetor normal do plano Π do enunciado: $\vec{r}=(2,-3,-1)$; reta passa por $P(-1,-1,2)$, e suas equações são

$$\begin{cases} x = & -1+2\ell \\ y = & -1-3\ell \\ z = & 2-\ell \end{cases}, \ell \in \mathbb{R}$$

calculando a intersecção da reta acima com o plano do enunciado:

$$2(-1+2\ell)-3(-1-3\ell)-(2-\ell) = 6 \Leftrightarrow (4+9+1)\ell = 6+2-3+2 = 7 \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}$$

e assim, sendo Q o ponto de intersecção, $Q-A = \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\vec{r}$ o que implica $d(\Pi, P) = \frac{\|\vec{r}\|}{2} = \frac{\sqrt{4+9+1}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

(b) a reta dada determina $A(-1,3,1)$ e $\vec{r}(-2,2,3)$. Define o vetor que falta usando Q e qq outro ponto da reta, $\vec{s} = \overrightarrow{AQ} = (1-(-1), 4-3, -2-1) = (2,1,-3)$

produto vetorial: $\vec{r} \wedge \vec{s}$: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-9,0,-6)$

equação do plano:: $-9(x+1)+0(y-3)+(-6)(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x+2z+1=0$

Questão 4.(3.0pt) ESCOLHA e RESOLVA 2 ítens.

4.(a) Encontre equação reduzida da superfície esférica que tem como diâmetro o segmento $\overline{AB}$, onde $A(2, -2, 1)$, $B(0, -1, -1)$.

4.(b) Identifique, descreva os principais elementos, encontre equação reduzida do lugar geométrico do plano XY equidistante do ponto $F(2, 3)$ e da reta $x = -6$.

4.(c) Descreva (eq reduzida, nome, principais elementos) o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) tais que $4x^2 + 2y^2 - z^2 + 4x + 4y + 2z + 6 = 0$.

4.(d) Descreva (eq reduzida, nome, principais elementos) o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) tais que $2x^2 - 2y^2 + z^2 + 4x + 4y + 2z + 1 = 0$.

Solução:

(a) os dois pontos determinam centro e raio: $C\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-2-1}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = C\left(1, -\frac{3}{2}, 0\right)$
raio $r = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(-2)^2}}{2} = \frac{3}{2}$
a equação reduzida é, portanto, $(x-1)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 + z^2 = \frac{9}{4}$

(b) trata-se de uma parábola com eixo principal paralelo a OX passando pelo foco $F(2, 3)$: o eixo principal é a reta $y = 3$
$4p = 2 - (-6) = 8 \Rightarrow p = 4$ e segue $V(2-4, 3) = V(-2, 3)$ é o vértice.
a equação reduzida é $(y-3)^2 = 4(3)(x-(-2))$ ou seja, $(y-3)^2 = 16(x+2)$.

(c) completamento de quadrados:

$$4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2(y^2 + 2y + 1) - (z^2 - 2z + 1) = -6 + 1 + 2 - 1 = -4$$

$$4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2(y+1)^2 - (z-1)^2 = -4 \Leftrightarrow -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{(y+1)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$$

trata-se de um hiperbolóide de duas folhas com eixo principal paralelo a OZ e vértices satisfazendo $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$, $(z-1)^2 = 4$ ou seja, eles são $V_1\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$ e $V_2\left(-\frac{1}{2}, -1, 3\right)$

(d) completamento de quadrados:

$$2(x^2 + 2x + 1) - 2(y^2 - 2y + 1) + z^2 + 2z + 1 = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$$

$$2(x+1)^2 - 2(y-1)^2 + (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = (x+1)^2 + \frac{(z+1)^2}{2}$$

e a superfície trata-se de um cone elíptico com eixo principal (de simetria) paralelo a OY , e vértice $V(-1, 1, -2)$.