Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01191 - Vetores e Geometria Analítica
Segunda Recuperação 2022/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Essa prova tem duração de 1h40min. (2) Calculadoras não podem ser usadas; você pode escrever e marcar à lapis. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação; leia atentamente. (4) Em qualquer das questões, a ausência de justificativa será penalizada.

Questão 1. (a)(1.5pt) Encontre equações paramétricas da reta que é ortogonal ao plano $2x - 3y - z = 6$ e que passa pelo ponto $P(-1, -1, 2)$. Encontre a distância entre o ponto P e tal plano.

(b)(1.5pt) Encontre equação cartesiana do plano determinado pela reta $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ e pelo ponto $Q(1, 4, -2)$.

Solução:

(a) vetor diretor da reta é vetor normal do plano Π do enunciado: $\vec{r} = (2, -3, -1)$; reta passa por $P(-1, -1, 2)$, e suas equações são

$$\begin{cases} x = & -1 + 2\ell \\ y = & -1 - 3\ell \\ z = & 2 - \ell \end{cases}, \ell \in \mathbb{R}$$

calculando a intersecção da reta acima com o plano do enunciado:

$$2(-1+2\ell) - 3(-1-3\ell) - (2-\ell) = 6 \Leftrightarrow (4+9+1)\ell = 6+2-3+2 = 7 \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}$$

e assim, sendo Q o ponto de intersecção, $Q - A = \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\vec{r}$ o que implica $d(\Pi, P) = \frac{\|\vec{r}\|}{2} = \frac{\sqrt{4+9+1}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

(b) a reta dada determina $A(-1, 3, 1)$ e $\vec{r}(-2, 2, 3)$. Define o vetor que falta usando Q e qq outro ponto da reta, $\vec{s} = \overrightarrow{AQ} = (1-(-1), 4-3, -2-1) = (2, 1, -3)$

produto vetorial: $\vec{r} \wedge \vec{s}$: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-9, 0, -6)$

equação do plano:: $-9(x+1) + 0(y-3) + (-6)(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2z + 1 = 0$

Questão 2. (a)(1.5pt) Encontre equação reduzida da superfície esférica que tem como diâmetro o segmento $\overline{AB}$, onde $A(2, -2, 1)$, $B(0, -1, -1)$.

(b)(1.5pt) Identifique, descreva os principais elementos, encontre equação reduzida do lugar geométrico do plano XY equidistante do ponto $F(2, 3)$ e da reta $x = -6$.

Solução:

(a) os dois pontos determinam centro e raio: $C\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-2-1}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = C\left(1, -\frac{3}{2}, 0\right)$

raio $r = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(-2)^2}}{2} = \frac{3}{2}$

a equação reduzida é, portanto, $(x-1)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 + z^2 = \frac{9}{4}$

(b) trata-se de uma parábola com eixo principal paralelo a OX passando pelo foco $F(2, 3)$: o eixo principal é a reta $y = 3$

$4p = 2 - (-6) = 8 \Rightarrow p = 4$ e segue $V(2-4, 3) = V(-2, 3)$ é o vértice.

a equação reduzida é $(y-3)^2 = 4(3)(x-(-2))$ ou seja, $(y-3)^2 = 16(x+2)$.

Questão 3.(a)(1.5pt) Descreva (eq reduzida, nome, principais elementos) o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) tais que $4x^2 + 2y^2 - z^2 + 4x + 4y + 2z + 6 = 0$.

(b)(1.5pt) Descreva (eq reduzida, nome, principais elementos) o lugar geométrico dos pontos (x, y, z) tais que $2x^2 - 2y^2 + z^2 + 4x + 4y + 2z + 1 = 0$.

(c)(1.0pt) Encontre uma equação cartesiana reduzida e descreva a curva plana que em coodenadas polares (r, θ) tem equação $r = \frac{2}{1-\cos(\theta)}$. Suponha que o polo O esteja no centro $(0, 0)$ do plano cartesiano.

Solução:

(a) ompletamento de quadrados:

$$4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2(y^2 + 2y + 1) - (z^2 - 2z + 1) = -6 + 1 + 2 - 1 = -4$$

$$4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2(y+1)^2 - (z-1)^2 = -4 \Leftrightarrow -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{(y+1)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$$

trata-se de um hiperbolóide de duas folhas com eixo principal paralelo a OZ e vértices satisfazendo $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$, $(z-1)^2 = 4$ ou seja, eles são $V_1\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$ e $V_2\left(-\frac{1}{2}, -1, 3\right)$

(b) completamento de quadrados:

$$2(x^2 + 2x + 1) - 2(y^2 - 2y + 1) + z^2 + 2z + 1 = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$$

$$2(x+1)^2 - 2(y-1)^2 + (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = (x+1)^2 + \frac{(z+1)^2}{2}$$

e a superfície trata-se de um cone elíptico com eixo principal (de simetria) paralelo a OY , e vértice $V(-1, 1, -2)$.

(c) sabemos $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r - r\cos(\theta) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 + x$$

$$x^2 + y^2 = (2 + x)^2 = 4 + 4x + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 4(x + 1)$$

trata-se da equação reduzida de uma parábola com vértice $V(-1, 0)$ e parâmetro focal $p = 1$ (já que $4p = 4$) , eixo principal paralelo a OX. Sua diretriz é a reta $x = -2$, seu foco é $F(0, 0)$ (está na origem, conforme já sabíamos pela expressão em coordenadas polares).