Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01191 - Vetores e Geometria Analítica
Segunda Verificação 2022/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Essa prova tem duração de 1h40min. (2) Calculadoras não podem ser usadas; você pode escrever e marcar à lapis. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação; leia atentamente. (4) Em questões alternativas, marque apenas uma, sem necessidade de justificar; nas discursivas, a ausência de justificativa será penalizada.

Q1.(1.0pt) Sobre retas de equações $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ e $\dfrac{x+1}{2} = -\dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2}$ está correto:

( ) são paralelas
( ) são coincidentes
(X) são ortogonais mas não concorre
( ) são concorrentes mas não ortogo
( ) são concorrentes e ortogonais
( ) nenhuma das demais afirmações

Primeira reta: $A(1,-1,1)$, $\vec{r} = (2,3,4)$, eqs paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\ell \\ y = -1 + 3\ell \\ z = 1 + 4\ell \end{cases}, \ell \in \mathbb{R}$$

Segunda reta: $B(-1,0,1)$, $\vec{s} = (2,-4,2)$. Os vetores diretores não são múltiplos um do outro, portanto não são paralelas ou coincidentes.

Substituindo as eqs da primeira na segunda: $\frac{1+2\ell+1}{2} = \frac{3\ell-1}{-4} = \frac{1+4\ell-1}{2}$ e a primeira igualdade equivale a $\ell = -3/7$, ao passo que a segunda equivale a $\ell = 1/11$. Dessa forma, as retas não são concorrentes. (não existe intersecção)

Finalmente, $\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle = (2,3,4) \cdot (2,-4,2) = 0$ então os vetores são mesmo ortogonais, e portanto as retas são ortogonais.

Q2.(1.0pt) Sobre equação cartesiana no plano de uma elipse de centro $C(4,6)$, eixo principal paralelo ao eixo das ordenadas, excentricidade $e = \frac{2}{3}$ e que tangencia (encosta em um único ponto) o eixo das abscissas, está correto:

( ) $\frac{(x-4)^2}{36} + \frac{(y-6)^2}{20} = 1$
(X) $\frac{(x-4)^2}{20} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$
( ) $\frac{(x-4)^2}{36} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1$
( ) $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$
( ) $\frac{(x-4)^2}{1620} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$
( ) nenhuma das demais afirmações está correta.

temos $\frac{(x-4)^2}{b^2} + \frac{(y-6)^2}{a^2} = 1$, onde $e = c/a = 2/3$ e $a = 6$ pela informação sobre tangência.

Dessa forma $c = \frac{2}{3}(6) = 4$, e $6^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b^2 = 20$, e a equação é

$$\frac{(x-4)^2}{20} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1.$$

Q3.(1.0pt) Podemos afirmar, sobre pontos $P(3,-1,2)$, e $Q(1,3,-1)$ e retas r, s de equações

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 7 - 4\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} x = -3 + 2\mu \\ y = 9 - 3\mu \\ z = -7 + 3\mu \end{cases}$$

( ) somente P pertence à reta r
( ) ambos os pontos pertencem à reta s
( ) nenhum dos pontos pertence à reta s
( ) nenhum dos pontos pertence à reta r
(X) somente Q pertence à reta s
( ) nenhuma das afirmações anteriores e:

testando a reta r:

$$\begin{cases} 3 = -1 + 2\lambda & \Rightarrow \lambda = 2 \\ -1 = 7 - 4\lambda & \Rightarrow 4\lambda = 8 \\ 2 = -4 + 3\lambda & \Rightarrow 3\lambda = 6 \end{cases} \text{ e assim } P \text{ pertence a } r$$

$$\begin{cases} 1 = -1 + 2\lambda & \Rightarrow \lambda = 1 \\ 3 = 7 - 4\lambda & \Rightarrow 4\lambda = 4 \\ -1 = -4 + 3\lambda & \Rightarrow 3\lambda = 3 \end{cases} \text{ e assim } Q \text{ pertence a } r$$

testando a reta s:

$$\begin{cases} 3 = -3 + 2\mu & \Rightarrow \mu = 3 \\ -1 = 9 - 3\mu & \Rightarrow 3\mu = 10 \\ 2 = -7 + 3\mu & \Rightarrow 3\mu = 9 \end{cases} \text{ e assim } P \text{ não pertence a } s$$

$$\begin{cases} 1 = -3 + 2\mu & \Rightarrow \mu = 2 \\ 3 = 9 - 3\mu & \Rightarrow 3\mu = 6 \\ -1 = -7 + 3\mu & \Rightarrow 3\mu = 6 \end{cases} \text{ e assim } Q \text{ pertence a } s$$

Q4.(1.0pt) Sobre o lugar geométrico do espaço XYZ que satisfaz a equação $(x-y+1)(x-y)=0$ podemos afirmar:

( ) são duas retas perpendiculares
( ) são duas retas paralelas
(X) são dois planos paralelos
( ) são dois planos perpendiculares
( ) está contido em um cone, gerado pela revolução de duas retas concorrentes
( ) nenhuma das afirmações anteriores está correta.

o lugar geométrico espacial satisfaz $y=x+1$ OU $y=x$, portanto são dois planos paralelos

Questão 5. Sejam pontos $P_1\,(1,-1,2)\,, P_2\,(2,3,1)$, e vetores $v_1 = \overrightarrow{OP_1}, v_2 = \overrightarrow{OP_2}$ onde O é a origem.

(a)(1.0pt) Encontre a distância de P_2 à reta determinada pelos múltiplos de v_1.
(b)(1.0pt) Encontre uma equação cartesiana para o plano gerado por v_1 e v_2.
(c)(1.0pt) Encontre uma equação cartesiana para o plano ortogonal v_2 e que passa por P_1.

Solução:

(a) Distância entre reta determinada por $A(0,0,0)$, $B(1,-1,2)$ e o ponto $P(2,3,1)$.

$$\overrightarrow{AP}=(2,3,1);\overrightarrow{AB}=(1,-1,2)\,,\ \overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-7,3,5)$$

$$D=\frac{\|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{\sqrt{(-7)^2+(3)^2+(5)^2}}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}}=\frac{\sqrt{83}}{\sqrt{6}}$$

(b) Calculando $N=v_1\times v_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-7,3,5)$, e como esse plano passa pela origem, sua equação é

$$-7(x-0)+3(y-0)+5(z-0)=0\Leftrightarrow -7x+3y+5z=0$$

(c) Eq de plano ortogonal a v_2 e que passa por $P_1(1,-1,2)$:

$$2(x-1)+3(y-(-1))+1(z-2)=0\Leftrightarrow 2x+3y+z-1=0.$$

Questão 6.(a)(1.5pt) Descreva a intersecção entre a superfície $\Omega: x^2+y^2-z^2-6x+8=0$ e o plano $\Pi: y-\frac{1}{2}=0$, determinando equação cartesiana e elementos básicos dessa intersecção, como eixo principal, centro, focos, vértices, assíntotas, se existirem.

(b)(1.5pt) Descreva a superfície de equação $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4=0$; calcule sua distância ao ponto $P(1,2,0)$.

Solução:

(a) completando quadrados: $(x-3)^2+y^2-z^2=-8+9=1$
fazendo $y=\frac{1}{2}:(x-3)^2-z^2=1-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$ implica
$\dfrac{(x-3)^2}{3/4}-\dfrac{z^2}{3/4}=1$ trata-se de uma hipérbole com centro $C(3,0)$ em XZ,
$a=b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, eixo principal paralelo a OX, $c^2=a^2+b^2=\frac{3}{2}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$
focos $F(3\pm\frac{\sqrt{6}}{2},0)$, excentricidade $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$
assintotas: $(x-3)^2-z^2=0\Leftrightarrow z=x-3$ e $z=3-x$

(b) completamento de quadrados: $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4+1+4=9=3^2$
trata-se de uma superfície esférica de centro $C(1,-2,0)$ e raio $r=3$.
Ainda $d(P,C)=\sqrt{(1-1)^2+(-2-2)^2+(0-0)^2}=4$ e o ponto P é exterior a superfice. A distância de P à superfície é portanto $D=4-3=1$.

FIM