Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01191 - Vetores e Geometria Analítica
Primeira Verificação 2022/2

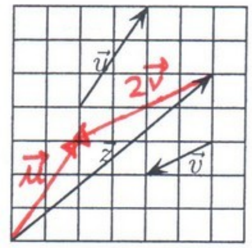
Nome: GABARITO FILA A **Cartão:**

Instruções: (1) Essa prova tem duração de 1h40min. (2) Calculadoras não podem ser usadas; você pode escrever e marcar à lapis. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação; leia atentamente. (4) Em questões alternativas, marque apenas uma, sem necessidade de justificar; nas discursivas, a ausência de justificativa será penalizada. (5) Aqui $\overline{XY}$ representa o segmento que une pontos X e Y.

Q1.(1.0pt) Sobre os vetores representados ao lado, é correto:

( ) $\vec{u} = \vec{z} - 3\vec{v}$
( ) $\vec{u} = \vec{z} + 3\vec{v}$
( ) $\vec{z} = \vec{u} + 2\vec{v}$
(X) $\vec{z} = \vec{u} - 2\vec{v}$
( ) $\vec{v} = \vec{u} - 4\vec{z}$
( ) nenhuma das demais afirmações está correta

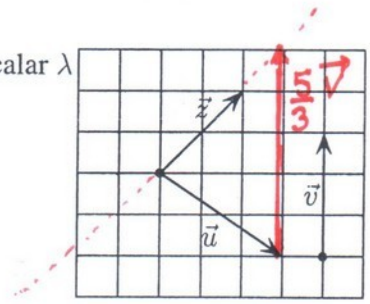
MOSTRADOS AO LADO:
$\vec{u} = \vec{z} + 2\vec{v}$ ou seja
$\vec{z} = \vec{u} - 2\vec{v}$



Q2.(1.0pt) Sobre os vetores apresentados na figura ao lado, e sobre escalar λ tal que $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ é paralelo a $\vec{z}$, é correto:

( ) $\lambda = \frac{5}{3}$
( ) $\lambda = -\frac{3}{5}$
( ) $\lambda = \frac{3}{5}$
(X) $\lambda = -\frac{5}{3}$
( ) tal λ não existe
( ) nenhuma das demais afirmações está correta

MOSTRADOS AO LADO:
$\vec{u} + \frac{5}{3}\vec{v} \parallel \vec{z} \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3}$



Q3.(1.0pt) Pontos A, B, C são não colineares e O é tal que $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{OB}$. Então

$\overrightarrow{OC} = CL(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
$\Rightarrow \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ são LD $\Rightarrow$ são COPLANARES

( ) $\overrightarrow{BC} = -2\,\overrightarrow{AC}$
( ) $\overrightarrow{AC} = -3\,\overrightarrow{BC}$
(X) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são coplanares
( ) $\overrightarrow{BC} = -2\,\overrightarrow{AC} + 3\,\overrightarrow{OB}$
( ) A, B e O estão alinhados
( ) nenhuma das demais afirmações está correta

Q4.(1.0pt) Vetores $\vec{a} = (1, 4, -3)$, $\vec{b} = (3, -1, 1)$ e $\vec{c} = (2, x, 1)$ são linearmente dependentes. É correto:

(X) $x = -\frac{11}{10}$
( ) x não existe
( ) $x = -\frac{10}{11}$
( ) $x = \frac{11}{10}$
( ) $x = \frac{10}{11}$
( ) nenhuma das demais afirmações está correta.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1(-1-x) - 4(3-2) - 3(3x+2) = 0$$
$$-1 - x - 4 - 9x - 6 = 0 \Leftrightarrow -10x = 11$$
$$x = -11/10$$

Q5.(1.0pt) Considere $\vec{a} = (5, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, -1)$, $\vec{c} = (2, 2, 3)$, $\vec{d} = (2, 1, -1)$. Está correto:

( ) o conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ forma uma base, apesar de não gerar $\vec{x} = (1, 3, 2)$
(X) o conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ forma uma base, e gera $\vec{y} = (8, 2, -3)$
( ) o conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ não forma uma base, apesar de gerar $\vec{x} = (6, 6, 2)$
( ) o conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ não forma uma base, apesar de gerar $\vec{y} = (6, 6, 2)$
( ) nenhuma das demais afirmações está correta.

ANALISANDO $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

$$\begin{matrix} 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{matrix}$$
$0 \quad -10 \quad 6 \qquad 0 \quad -4 \quad 0$

det $= -4 + 4 = 0$
NÃO FORMAM BASE

ANALISANDO $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$

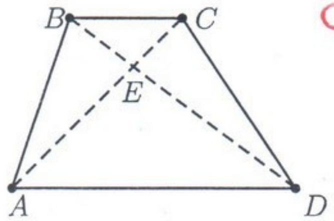
$$\begin{matrix} 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{matrix}$$
$0 \quad -5 \quad -2 \qquad 0 \quad -4 \quad 0$

det $= -4 + 7 = 3$
FORMAM BASE

$$\begin{matrix} 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 6 & 6 \end{matrix}$$
$0 \quad -30 \quad 4 \qquad 0 \quad -12 \quad 0$

det $= -12 + 26 \neq 0$
$\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}\}$ LI
$\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ não gera $\vec{x}$

Q6.(1.5pt) No trapézio , E é o ponto de intersecção entre os segmentos tracejados. Sabendo $|\overline{BC}| = 2$ e $|\overline{AD}| = 5$, calcule α tal que $\overrightarrow{AE} = \alpha\ \overrightarrow{AC}$.



OS TRIÂNGULOS BEC e DEA SÃO SEMELHANTES!

$$\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{|\overrightarrow{EC}|}{|\overrightarrow{EA}|} = \frac{2}{5} \Rightarrow \overrightarrow{EC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AE}$$

IMPLICA $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AE} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$ $\qquad \alpha = 5/7$

Q7. Sejam A, B, C, D vértices de um tetraedro, onde $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 4, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 3, -2)$.

(a)(2.5pt) Encontre o volume V do tetraedro e suas as alturas relativas aos vértices B, C e D.

(b)(1.0pt) Encontre a projeção ortogonal de $\overrightarrow{AD}$ na direção do produto vetorial $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

(a) VOLUME $= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{|-29|}{6} = \frac{29}{6}$

$$\begin{matrix} -2 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$8 \quad -6 \quad -6 \quad 16 \quad 3 \quad 6$

$\det = 25 + 4 = 29$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-5, 4, -11)$

$|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{25+16+121} = \sqrt{162}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-12, -2, -9) \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}| = \sqrt{144+4+81} = \sqrt{229}$

$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-11, 3, -1) \Rightarrow |\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}| = \sqrt{121+9+1} = \sqrt{131}$

ALTURA RELATIVA A B: $\frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}|} = \frac{29}{\sqrt{131}}$

ALTURA RELATIVA A C: $\frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|} = \frac{29}{\sqrt{229}}$

ALTURA RELATIVA A D: $\frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|} = \frac{29}{\sqrt{162}}$

(b) JÁ CALCULAMOS $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-5, 4, -11)$

$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 29$

$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = (\sqrt{162})^2 = 162$

$\Rightarrow \mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AD} = \frac{29}{162}(-5, 4, -11)$!