Mat01099 - Seminário Integrador III - UFRGS
Prof. João Batista Carvalho

Tarefa 1. Entregar em 14/3/2014.

1. Apresente demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

2. Apresente uma sequência de Cauchy, sobre os números racionais, que converge a $u = \ln(2)$. Demonstre/justifique essa convergência. Apresente resultados numéricos com 3 casas decimais corretas.

3. Apresente uma sequência de Cauchy, sobre os números racionais, que converge a $u = \pi$. Demonstre/justifique essa convergência. Apresente resultados numéricos com 3 casas decimais corretas.

$\square$

Tarefa 2. Entregar em 28/3/2014.

1. Em *Scilab*, encontre z tal que $z = \sqrt{x^2 + x^4}$, onde $x = 10^{80}$. Use *diary* para salvar sua sessão, e apresente-a. Use *format("e",20)* para melhor visualização.

2. Em *Scilab*, encontre z tal que $z = \sqrt{x^2 + x^4}$, onde $x = -10^{-200}$, com máxima exatidão. Use *diary* para salvar sua sessão, e apresente-a. Use *format("e",20)* para melhor visualização.

3. Subtração catastrófica é esperada na avaliação, em aritmética de máquina, da expressão $y = 1 - \sqrt{1+p}$, nas situações em que a magnitude de p é pequena. Indique como avaliar essa expressão com máxima exatidão, e preencha a tabela abaixo (use *format("e",20)* em Scilab) usando SUA estratégia (benfeitoria).

p	y	p	y
10^{-1}		10^{-11}	
10^{-3}		10^{-13}	
10^{-5}		10^{-15}	
10^{-7}		10^{-17}	
10^{-9}		10^{-19}	

4. Indique como avaliar, com máxima exatidão, $y = 1 - \cos(x)$. Usando *format("e",20)* em *Scilab*, complete a tabela abaixo:

x	y	x	y
10^{0}		10^{-5}	
10^{-1}		10^{-6}	4.9999999999996D-13
10^{-2}		10^{-7}	
10^{-3}		10^{-8}	
10^{-4}		10^{-9}	

$\square$

Tarefa 3. Entregar em 11/4/2014.

1. Encontre, analiticamente, a área do paralelogramo determinado pelos vetores $x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, usando determinantes e usando geometria plana.

2. Encontre, analiticamente, o volume do paralelogramo determinado pelos vetores $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, usando determinantes e usando geometria espacial.

3. Encontre, analiticamente, as direções invariantes associadas as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

4. Apresente exemplo de matriz $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que representa transformação linear que, agindo sobre um vetor $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, produz um giro de 60 graus em torno do vetor $\mathbf{j}$, no sentido que vai de $\mathbf{k}$ para $\mathbf{i}$. Qual(is) a(s) direções invariantes dessa transformação ?

5. Apresente exemplo de:

(5a) Matriz 3×3 que é simétrica, não é a identidade, mas possui um autovalor unitário.

(5b) Matriz 3×3 que não é simétrica, mas é positiva definida.

(5c) Matriz 3×3 que é singular, simétrica e indefinida.

□

Tarefa 4: Entregar em 25/4/2014. Ref.: David Luenberger. Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1979.

1. Pesquise e apresente demonstração: os autovalores de uma matriz A simétrica são reais.

2. Pesquise e apresente demonstração: Se x_1 e x_2 são autovetores associados a autovalores distintos de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então são ortogonais segundo o produto interno usual $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

3. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.3 & 0. \\ 0.3 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0. & -0.8 \end{bmatrix}$, determine, analiticamente, o comportamento (no limite) da sequência $\{A^k\}$.

4. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.3 & 0. \\ 0.3 & 0.6 & 0. \\ 0. & 0. & -0.8 \end{bmatrix}$, determine, analiticamente, o comportamento (no limite) da sequência $\{A^k\}$.

5. Sendo $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0. & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$, determine, analiticamente, o comportamento (no limite) da sequência $\{A^k\}$.

6. Mostre que, se uma matriz A é multiplicada por um escalar μ, então seus autovalores também serão multiplicados por μ, enquanto seus autovetores permanecem os mesmos.

7. Mostre que, se uma matriz A tem autovalores $\lambda \neq 0$, então sua inversa tem autovalores $1/\lambda$, enquanto seus autovetores são os mesmos, respectivamente.

□

Tarefa 5: Entregar (já impressso) em 16/5/2014.

Ref.: [1] David Luenberger. Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1979.

1. Extraído de: Problemas 6.9 (4) de [1]. Use o lema de expansão em série da inversa para calcular

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

2. Inspirado em: Problemas 6.9 (10) de [1]. Supõe que dois números positivos a e b sejam dados e considere a iteração

$$\begin{cases} y_0 = a & , y_1 = b \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n + y_{n-1}}{2} & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}.$$

(a) Encontre a expressão geral de y_n e o limite, se existir, dessa iteração. Mostre que não é a média aritmética entre a e b.

(b) Escreva o problema na forma de variáveis de estado: $\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, com $\mathbf{u}_0$ conveniente. Encontre o autovalor dominante de A, se existir. Determine o comportamento limite da sequência $\{A^n\}$ e relacione propriedades da matriz A com o limite de $\{\mathbf{u}_n\}$ e então de $\{y_n\}$.

3. Revisite o modelo de tempo na seção 7.1 de [1]. Encontre, analiticamente OU computacionalmente, a distribuição limite para

$$\begin{bmatrix} E \\ N \\ C \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.28 & 0.4 & 0.5 \\ 0.02 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ N \\ C \end{bmatrix}_k$$

E: dia ensolarado, N: dia nublado, C: dia chuvoso.

Tarefa 6: Entregar (já impressso) em 30/5/2014.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre seus autovalores e seus autovetores unitários. Comprove que podemos montar, com esses últimos, uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$ e seja $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz que armazena esta base. Mostre que $X^T = X^{-1}$, e então use isso para estabelecer $A = X\Lambda X^{-1} = X\Lambda X^T$, e então justifique que e^A também é uma matriz simétrica. Determine, analiticamente, e^A, efetuando todos os produtos.

2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Encontre seus autovalores e seus autovetores unitários. Comprove que podemos montar, com esses últimos, uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$ e seja $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz que armazena esta base. Mostre que $X^T = X^{-1}$, e então use isso para estabelecer $A = X\Lambda X^{-1} = X\Lambda X^T$, e então justifique que e^A também é uma matriz simétrica. Determine, analiticamente, e^A, efetuando todos os produtos.

□

Tarefa 7: Entregar (já impresso) em 11/07.

Exercício sobre Equação do Calor, dado pelo Prof. Leonardo Guidi.

Tarefa 8: Entregar (já impresso) em 11/07.

Modelagem usando EDO. Um tanque com capacidade de 1000 litros (ℓ) capta resíduos poluentes de um processo químico. Inicialmente ($t = 0$ horas), o tanque tem 800 litros de água e 2 gramas (g) de poluente. A água que entra no tanque, a uma vazão de 3 ℓ/h, contém $5g/\ell$ de poluição. Uma solução homogênea deixa o tanque a uma vazão de $3\ell/h$ (a mesma da entrada). Quando a quantidade de poluente atinge 500g (seja $t = t_1$ esse instante), cessa a entrada de água contaminada, água limpa passa a entrar a uma taxa de 2 ℓ/h, enquanto solução contaminada sai a uma taxa de 4 ℓ/h. Para determinar a quantidade de poluição no tanque em qualquer instante t:

(a) Seja $t_2 > t_1$ o instante onde o tanque esvaziaria. Mostre que $t_2 = t_1 + 400$.

(b) Seja $Q(t) = Q_1(t)$ a quantidade de poluente no tanque, para $0 \leq t \leq t_1$. Encontre e resolva a EDO que Q_1 satisfaz.

(c) Encontre t_1 (e então t_2) usando a resposta do ítem anterior. Respostas aproximadas: $t_1 \approx 35.5$, $t_2 \approx 435.5$ horas.

(d) Seja $Q(t) = Q_2(t)$ a quantidade de poluente no tanque, para $t_1 \leq t \leq t_2$. Encontre e resolva a EDO que Q_2 satisfaz.

□