

MAT01098 - SEMINÁRIO INTEGRADOR II

PROJETO COMPUTACIONAL: Sistemas Computacionais Algébricos II

FONTE: Howard Anton. Cálculo, um novo horizonte. 6a edição, Ed Bookman

Entrega:

Em aula, foi abordado como resolver sistemas lineares em Maple e Xmaxima.
Tarefa: Usar Maple ou XMaxima (à sua escolha) para resolver os problemas
de decomposição em frações parciais

9.5: 37, 38, 39 e 40

9.6: 87 e 88

do seguinte modo:

- (a) montando e resolvendo sistemas lineares no CAS escolhido
- (b) usando diretamente o comando disponível no CAS

9.5 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

Lembre que uma função racional é uma razão de dois polinômios. Nesta seção, vamos dar um método geral para a integração de funções racionais, baseado na idéia de decompor uma função racional em uma soma de funções racionais mais simples, que possam ser integradas pelos métodos estudados nas seções anteriores.

FRAÇÕES PARCIAIS

Em álgebra, aprende-se como combinar duas ou mais frações em uma única, achando o denominador comum. Por exemplo,

$$\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1) + 3(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \frac{5x-10}{x^2-3x-4} \quad (1)$$

Porém, para os propósitos de integração, o lado esquerdo de (1) é preferível ao lado direito, uma vez que cada um dos seus termos é de fácil integração:

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx = \int \frac{2}{x-4} dx + \int \frac{3}{x+1} dx = 2\ln|x-4| + 3\ln|x+1| + C$$

Assim, é desejável ter algum método que nos possibilite obter o lado esquerdo de (1) a partir do lado direito. Para ilustrar como isso pode ser feito, começamos por notar que, no lado esquerdo, os numeradores são constantes, e os denominadores são os fatores do denominador do lado direito. Desta forma, para encontrar o lado esquerdo de (1) a partir do lado direito, deveremos fatorar o denominador do lado direito e procurar por constantes A e B , tal que

$$\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \quad (2)$$

Uma maneira de encontrar as constantes A e B é multiplicando ambos os membros de (2) por $(x-4)(x+1)$, para eliminar a fração. Isto dá lugar a

$$5x-10 = A(x+1) + B(x-4) \quad (3)$$

Esta relação é válida para todo x ; assim, em particular, é válida para $x=4$ e $x=-1$. Substituir

$x = 4$ em (3) faz com que o segundo termo desapareça e dê lugar à equação $10 = 5A$ ou $A = 2$; substituir $x = -1$ em (3) faz com que desapareça o primeiro termo da direita e resulte na equação $-15 = -5B$ ou $B = 3$. Substituindo-se estes valores em (2), obtemos

$$\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)} = \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1} \quad (4)$$

o que está de acordo com (1).

Um segundo método para encontrar as constantes A e B é multiplicando o lado direito de (3) e juntando as potências iguais de x para obter

$$5x - 10 = (A+B)x + (A-4B)$$

Uma vez que os polinômios dos dois lados são idênticos, os seus coeficientes correspondentes devem ser os mesmos. Equacionando os coeficientes correspondentes nos dois lados, obtém-se o seguinte sistema de equações nas incógnitas A e B :

$$A + B = 5$$

$$A - 4B = -10$$

Resolvendo este sistema, temos $A = 2$ e $B = 3$, como anteriormente (verifique).

Os termos à direita de (4) são chamados **frações parciais** das expressões do lado esquerdo, pois cada um constitui uma *parte* daquela expressão. Para encontrar as frações parciais, primeiro tivemos que fazer uma suposição sobre a sua forma e, então, tivemos que encontrar as constantes desconhecidas. Nosso próximo objetivo é estender esta idéia a funções racionais em geral. Com esta finalidade, vamos supor que $P(x)/Q(x)$ seja uma **função racional própria**, o que significa que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Há um teorema na álgebra avançada que estabelece que toda função racional própria pode ser expressa como uma soma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x)$$

onde $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ são funções racionais da forma

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$$

nas quais os denominadores são fatores de $Q(x)$. A soma é chamada de **decomposição em frações parciais** de $P(x)/Q(x)$, e os termos são chamados de **frações parciais**. Como em nosso exemplo de abertura, há duas etapas para se encontrar uma decomposição em frações parciais: determinar a forma exata da decomposição e encontrar as constantes desconhecidas.

O primeiro passo para se achar a forma de uma decomposição em frações parciais de uma função racional própria $P(x)/Q(x)$ é fatorar completamente $Q(x)$ em fatores lineares, quadráticos e irredutíveis e, então, juntar todos os fatores repetidos, de tal modo que $Q(x)$ seja expresso como um produto de fatores *distintos* da forma

$$(ax+b)^m \text{ e } (ax^2+bx+c)^n$$

A partir destes fatores, podemos determinar a forma da decomposição das frações parciais usando duas regras, as quais discutiremos a seguir.

Se todos os fatores de $Q(x)$ são lineares, então a decomposição em frações parciais de $P(x)/Q(x)$ pode ser determinada usando-se a seguinte regra:

REGRA DO FATOR LINEAR. Para cada fator da forma $(ax+b)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de m frações parciais:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

onde $A_1, A_2, \dots, A_m$ são constantes a serem determinadas. No caso onde $m = 1$, aparece somente o primeiro termo da soma.

.....
ACHANDO A FORMA DE
UMA DECOMPOSIÇÃO EM
FRAÇÕES PARCIAIS

.....
FATORES LINEARES

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

Solução. O integrando é uma função racional própria, que pode ser escrita como

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

Os fatores $x-1$ e $x+2$ são lineares e aparecem na primeira potência; assim sendo, cada fator contribui com um termo na decomposição em frações parciais pela regra do fator linear. Deste modo, a decomposição tem a forma

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad (5)$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Multiplicando-se ambos os membros de (5) por $(x-1)(x+2)$, obtém-se

$$1 = A(x+2) + B(x-1) \quad (6)$$

Conforme discutido anteriormente, existem dois métodos para se encontrar A e B : podemos substituir valores de x escolhidos, de forma a anular termos à direita, ou podemos multiplicar o lado direito e equacionar coeficientes correspondentes nos dois lados para obter um sistema de equações que podem ser resolvidas para A e B . Vamos usar a primeira abordagem.

Fazendo-se $x=1$, o segundo termo em (6) desaparece, e obtemos $1=3A$ ou $A=\frac{1}{3}$; fazendo-se $x=-2$, o primeiro termo em (6) desaparece, e obtemos $1=-3B$ ou $B=-\frac{1}{3}$. Substituindo esses valores em (5), obtém-se a decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}$$

A integração pode ser completada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

Se os fatores de $Q(x)$ são lineares e nenhum é repetido, como no último exemplo, então o método recomendado para encontrar as constantes na decomposição em frações parciais é a substituição de valores apropriados de x para fazer desaparecer termos. Entretanto, se alguns dos fatores lineares são repetidos, então não será mais possível encontrar todas as constantes desta forma. Neste caso, o procedimento recomendado é encontrar tantas constantes quanto possível por substituição e, então, encontrar as demais equacionando os coeficientes. Isto está ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2} dx$.

Solução. O integrando pode ser reescrito como

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2} = \frac{2x+4}{x^2(x-2)}$$

Embora x^2 seja um fator quadrático, ele não é irredutível, pois $x^2 = xx$. Assim, pela regra do fator linear, x^2 introduz dois termos (uma vez que $m=2$) da forma

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

e o fator $x - 2$ introduz um termo (uma vez que $m = 1$) da forma

$$\frac{C}{x-2}$$

logo, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} \quad (7)$$

Multiplicando-se por $x^2(x-2)$, obtém-se

$$2x+4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2 \quad (8)$$

a qual, após a multiplicação e juntando-se as mesmas potências de x , fica

$$2x+4 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B \quad (9)$$

Fazendo-se $x = 0$ em (8), desaparecem o primeiro e o terceiro termos; obtendo-se $B = -2$ e fazendo-se $x = 2$ em (8), o primeiro e o segundo termos desaparecem, resultando em $C = 2$ (verifique). Porém, não há substituição em (8) que produza A diretamente; assim sendo, fazemos uso da equação (9) para encontrar esse valor. Isto pode ser feito equacionando-se os coeficientes de x^2 em ambos os lados para obter

$$A + C = 0 \quad \text{ou} \quad A = -C = -2$$

Substituindo-se os valores $A = -2$, $B = -2$ e $C = 2$ em (7), obtém-se a decomposição de frações parciais

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+4}{x^2(x-2)} dx &= -2 \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{dx}{x-2} \\ &= 2 \ln|x| + \frac{2}{x} + 2 \ln|x-2| + C = 2 \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{2}{x} + C \end{aligned}$$

FATORES QUADRÁTICOS

Se alguns dos fatores de $Q(x)$ são quadráticos irredutíveis, então a contribuição destes fatores para a decomposição em frações parciais de $P(x)/Q(x)$ pode ser determinada a partir da seguinte regra:

REGRA DO FATOR QUADRÁTICO. Para cada fator da forma $(ax^2 + bx + c)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de m frações parciais:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

onde $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m$ são constantes a serem determinadas. No caso onde $m = 1$, aparece somente o primeiro termo da soma.

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{x^2 + x - 2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1} dx$.

Solução. O denominador do integrando pode ser fatorado por agrupamento:

$$\frac{x^2 + x - 2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2(3x - 1) + (3x - 1)} = \frac{x^2 + x - 2}{(3x - 1)(x^2 + 1)}$$

Pela regra do fator linear, o fator $3x - 1$ introduz um termo, a saber

$$\frac{A}{3x-1}$$

e pela regra do fator quadrático, o fator $x^2 + 1$ introduz um termo, a saber

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Assim, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad (10)$$

Multiplicando-se ambos os membros de (10) por $(3x-1)(x^2+1)$, obtém-se

$$x^2+x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(3x-1) \quad (11)$$

Poderíamos encontrar A substituindo $x = \frac{1}{3}$, o que faz desaparecer o último termo, e, então, determinar as constantes, equacionando os coeficientes correspondentes. Contudo, neste caso é mais fácil encontrar *todas* as constantes equacionando os coeficientes e resolvendo o sistema resultante. Com esta finalidade, multiplicamos o lado direito de (11) e juntamos as mesmas potências:

$$x^2+x-2 = (A+3B)x^2 + (-B+3C)x + (A-C)$$

Equacionando os coeficientes correspondentes, obtém-se

$$A+3B = 1$$

$$-B+3C = 1$$

$$A - C = -2$$

Para resolver este sistema, subtraímos a terceira equação da primeira para eliminar A . Então, usamos a equação resultante com a segunda equação para obter B e C . Finalmente, determinamos A a partir da primeira ou da terceira equação. Isto dá lugar a (verifique)

$$A = -\frac{7}{5}, \quad B = \frac{4}{5}, \quad C = \frac{3}{5}$$

Assim, (10) se torna

$$\frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{-\frac{7}{5}}{3x-1} + \frac{\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}}{x^2+1}$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} dx &= -\frac{7}{5} \int \frac{dx}{3x-1} + \frac{4}{5} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\frac{7}{15} \ln|3x-1| + \frac{2}{5} \ln(x^2+1) + \frac{3}{5} \operatorname{tg}^{-1} x + C \end{aligned}$$

PARA O LEITOR. Os CAS são capazes de encontrar decomposições em frações parciais. Se você tem um CAS, leia o manual e use-o para encontrar as decomposições nos Exemplos (1), (2) e (3).

Exemplo 4

Calcule $\int \frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)(x^2+3)^2} dx$.

Solução. Observe que o integrando é uma função racional própria, uma vez que o numerador tem grau 4 e o denominador tem grau 5. Assim, o método das frações parciais é aplicável. Pela regra do fator linear, o fator $x+2$ introduz um só termo

$$\frac{A}{x+2}$$

e pela regra do fator quadrático, o fator $(x^2 + 3)^2$ introduz dois termos (uma vez que $m = 2$):

$$\frac{Bx + C}{x^2 + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 3)^2}$$

Assim, a decomposição em frações parciais do integrando é

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x + 2)(x^2 + 3)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 3)^2} \quad (12)$$

Multiplicando-se por $(x + 2)(x^2 + 3)^2$, obtém-se

$$\begin{aligned} 3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 \\ = A(x^2 + 3)^2 + (Bx + C)(x^2 + 3)(x + 2) + (Dx + E)(x + 2) \end{aligned} \quad (13)$$

a qual, após a multiplicação e juntando-se as mesmas potências de x , fica:

$$\begin{aligned} 3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9 \\ = (A + B)x^4 + (2B + C)x^3 + (6A + 3B + 2C + D)x^2 \\ + (6B + 3C + 2D + E)x + (9A + 6C + 2E) \end{aligned} \quad (14)$$

Equacionar os coeficientes correspondentes em (14) dá lugar ao seguinte sistema de 5 equações lineares em 5 incógnitas:

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ 2B + C &= 4 \\ 6A + 3B + 2C + D &= 16 \\ 6B + 3C + 2D + E &= 20 \\ 9A + 6C + 2E &= 9 \end{aligned} \quad (15)$$

Métodos eficientes para a resolução de sistemas lineares, como estes, são estudados em um ramo da matemática chamado de *álgebra linear*; estes métodos estão fora do escopo deste livro. Porém, sistemas lineares de praticamente qualquer tamanho são resolvidos pelo computador, e a maioria dos CAS tem comandos que, em muitos casos, resolvem o sistema linear exatamente. Neste caso em particular, podemos simplificar o trabalho efetuando primeiro a substituição $x = -2$ em (13), da qual resulta que $A = 1$. Substituindo este valor de A em (15), teremos o sistema mais simples

$$\begin{aligned} B &= 2 \\ 2B + C &= 4 \\ 3B + 2C + D &= 10 \\ 6B + 3C + 2D + E &= 20 \\ 6C + 2E &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Este sistema pode ser resolvido de cima para baixo, primeiro substituindo $B = 2$ na segunda equação para obter $C = 0$, depois substituindo os valores conhecidos de B e C na terceira equação para obter $D = 4$, e assim por diante. Desta forma, obtém-se

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = 4, \quad E = 0$$

Portanto, (12) se torna

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x + 2)(x^2 + 3)^2} = \frac{1}{x + 2} + \frac{2x}{x^2 + 3} + \frac{4x}{(x^2 + 3)^2}$$

logo

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x + 2)(x^2 + 3)^2} dx \\ = \int \frac{dx}{x + 2} + \int \frac{2x}{x^2 + 3} dx + 4 \int \frac{x}{(x^2 + 3)^2} dx \\ = \ln|x + 2| + \ln(x^2 + 3) - \frac{2}{x^2 + 3} + C \end{aligned}$$

INTEGRANDO FUNÇÕES RACIONAIS IMPRÓPRIAS

Embora o método das frações parciais se aplique somente a funções racionais próprias, uma função racional imprópria pode ser integrada efetuando-se uma divisão e expressando-se a função como o quociente mais o resto sobre o divisor. O resto sobre o divisor será uma função racional própria, a qual pode, então, ser decomposta em frações parciais. Esta idéia está ilustrada no exemplo a seguir:

Exemplo 5

Calcule $\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} dx$.

Solução. O integrando é uma função racional imprópria, uma vez que o numerador tem grau 4 e o denominador tem grau 2. Assim, vamos primeiro efetuar a divisão:

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \overline{) 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1} \\ \underline{3x^4 + 3x^3 - 6x^2} \\ x^2 + x - 1 \\ \underline{x^2 + x - 2} \\ 1 \end{array}$$

Tem-se, então, que o integrando pode ser expresso como

$$\frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = (3x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

e, portanto,

$$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} dx = \int (3x^2 + 1) dx + \int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

A segunda integral à direita envolve uma função racional própria e pode ser calculada por uma decomposição em frações parciais. Usando o resultado do Exemplo 1, obtemos

$$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} dx = x^3 + x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$

OBSERVAÇÕES FINAIS

Há alguns casos nos quais é inapropriado o método das frações parciais. Por exemplo, seria ilógico usar frações parciais para efetuar a integração

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 8} dx = \ln |x^3 + 2x - 8| + C$$

uma vez que é mais direta a substituição $u = x^3 + 2x - 8$. Analogamente, a integração

$$\int \frac{2x-1}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = \ln(x^2+1) - \operatorname{tg}^{-1} x + C$$

requer somente um pouco de álgebra, uma vez que o integrando já está na forma de frações parciais.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.5 CAS

Nos Exercícios de 1 a 8, escreva a forma da decomposição em frações parciais. (Não ache os valores numéricos dos coeficientes.)

1. $\frac{3x-1}{(x-2)(x+5)}$

2. $\frac{5}{x(x^2-9)}$

3. $\frac{2x-3}{x^3-x^2}$

4. $\frac{x^2}{(x+2)^3}$

5. $\frac{1-5x^2}{x^3(x^2+1)}$

6. $\frac{2x}{(x-1)(x^2+5)}$

7. $\frac{4x^3-x}{(x^2+5)^2}$

8. $\frac{1-3x^4}{(x-2)(x^2+1)^2}$

Nos Exercícios de 9 a 32, calcule a integral.

9. $\int \frac{dx}{x^2+3x-4}$

10. $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$

11. $\int \frac{11x+17}{2x^2+7x-4} dx$

13. $\int \frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x} dx$

15. $\int \frac{x^2+2}{x+2} dx$

17. $\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4} dx$

19. $\int \frac{x^5+2x^2+1}{x^3-x} dx$

21. $\int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} dx$

23. $\int \frac{x^2+x-16}{(x+1)(x-3)^2} dx$

25. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3} dx$

27. $\int \frac{2x^2-1}{(4x-1)(x^2+1)} dx$

29. $\int \frac{x^3+3x^2+x+9}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$

31. $\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1} dx$

32. $\int \frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10} dx$

12. $\int \frac{5x-5}{3x^2-8x-3} dx$

14. $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$

16. $\int \frac{x^2-4}{x-1} dx$

18. $\int \frac{x^2}{x^2-3x+2} dx$

20. $\int \frac{2x^5-x^3-1}{x^3-4x} dx$

22. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2} dx$

24. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2} dx$

26. $\int \frac{2x^2+3x+3}{(x+1)^3} dx$

28. $\int \frac{dx}{x^3+x}$

30. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$

Nos Exercícios 33 e 34, calcule a integral fazendo a substituição que converte o integrando em uma função racional.

33. $\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 5} d\theta$

34. $\int \frac{e^t}{e^{2t}-4} dt$

35. Ache o volume do sólido gerado quando a região encerrada por $y = x^2/(9-x^2)$, $y = 0$, e $x = 2$ gira em torno do eixo x .

36. Ache a área da região sob a curva $y = 1/(1+e^x)$, acima do intervalo $[-\ln 5, \ln 5]$. [Sugestão: faça uma substituição que converta o integrando em uma função racional.]

Nos Exercícios 37 e 38, use um CAS para calcular a integral de duas maneiras (i) integrando diretamente; (ii) use o CAS para encontrar a decomposição em frações parciais e integrar a decomposição. Integre à mão para verificar os resultados.

37. $\int \frac{x^2+1}{(x^2+2x+3)^2} dx$

38. $\int \frac{x^5+x^4+4x^3+4x^2+4x+4}{(x^2+2)^3} dx$

Nos Exercícios 39 e 40, integre à mão e verifique a sua resposta usando um CAS.

39. $\int \frac{dx}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$

40. $\int \frac{dx}{16x^3-4x^2+4x-1}$

41. Mostre que

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{8}$$

42. Use frações parciais para deduzir a fórmula de integração

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

9.6 O USO DE TABELAS DE INTEGRAIS E SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção, discutiremos como integrar usando tabelas e vamos dirigir a sua atenção para alguns itens relacionados ao uso de sistemas algébricos de computação para integração. Os leitores que não estão usando sistemas algébricos computacionais podem ignorar este material, sem nenhum problema.

As tabelas de integrais são úteis na eliminação de enfadonhos cálculos à mão. As últimas páginas deste livro contêm uma tabela de integral relativamente breve, à qual nos iremos referir como *Tabela de Integrais do Final*; tabelas mais abrangentes estão publicadas em livros de referência-padrão, tais como *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, CRC Press, Inc., 1991.

Todas as tabelas de integrais têm o seu próprio sistema de classificação, de acordo com a forma do integrando. Por exemplo, a Tabela de Integrais do Final classifica as integrais em 15 categorias; *Funções Básicas*, *Recíprocos das Funções Básicas*, *Potências de Funções Trigonômicas*, *Produtos de Funções Trigonômicas* e, assim por diante. O primeiro passo ao trabalhar com tabelas é ler tudo sobre a classificação, de tal forma a compreender o esquema de classificação e saber onde buscar diferentes tipos de integrais.

Assim, a partir de (5), obtemos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2 du}{1+u^2}}{1 - \left(\frac{2u}{1+u^2}\right) + \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \\ &= \int \frac{2 du}{(1+u^2) - 2u + (1-u^2)} \\ &= \int \frac{du}{1-u} = -\ln|1-u| + C = -\ln|1 - \operatorname{tg}(x/2)| + C\end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. A substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$ irá converter qualquer função racional de $\sin x$ e $\cos x$ para uma função racional ordinária de u . No entanto, o método pode levar a decomposições em frações parciais enfadonhas. Portanto, pode valer a pena explorar a existência de métodos mais simples quando se estiver calculando à mão.

..... INTEGRAÇÃO COM SISTEMAS ALGÉBRICOS COMPUTACIONAIS

As tabelas de integração estão rapidamente dando lugar à integração computadorizada, usando sistemas algébricos computacionais. Entretanto, a integração computadorizada é muito parecida com o xadrez computadorizado – o computador pode escolher através de numerosíssimas possibilidades rapidamente, mas a abordagem é, por vezes, mecânica, faltando a imaginação e o julgamento do pensamento humano. Como resultado, as respostas produzidas por integrações no computador são, por vezes, menos satisfatórias do que aquelas nas tabelas de integrais, que têm sido aperfeiçoadas durante muitos anos, por muitas mentes matemáticas excelentes.

Às vezes, sistemas algébricos computacionais não produzem a forma mais geral de uma integral indefinida. Por exemplo, a forma de integração

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$$

que pode ser obtida por inspeção ou usando a substituição $u = x - 1$ é válida para $x \neq 1$. No entanto, o *Mathematica*, o *Maple* e o *Derive* calculam esta integral como *

$$\begin{array}{ccc} \ln(1-x), & \ln(x-1), & \ln(x-1), \\ \text{Mathematica} & \text{Maple} & \text{Derive} \end{array}$$

Observe que nenhum dos sistemas coloca constante de integração – supõe-se simplesmente que ela está ali. Observe também que nenhum dos sistemas põe sinais de valor absoluto; conseqüentemente, para o *Maple* e o *Derive*, a antiderivada resultante é válida somente se $x > 1$, e para o *Mathematica*, somente se $x < 1$. Assim, embora todos os sistemas algébricos computacionais produzam uma antiderivada correta, nenhum deles produz a antiderivada mais geral.

Agora, vamos examinar como o *Mathematica*, o *Maple* e o *Derive* tratam a integral

$$\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} \, dx = \frac{1}{3}(x^2 - x - 1)\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) \quad (6)$$

a qual obtivemos no Exemplo 3(b) (com a constante da integração incluída). O *Derive* produz esse resultado numa forma algébrica ligeiramente diferente, e o *Maple* produz o resultado

$$\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} \, dx = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 5)^{3/2} + \frac{1}{2}(2x - 4)\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sinh^{-1}(x - 2)$$

Isto pode ser reescrito como (6) expressando o expoente fracionário na forma de radical e expressando $\sinh^{-1}(x - 2)$ na forma logarítmica, usando o Teorema 8.8.4 (verifique). O

* Os resultados produzidos por *Mathematica*, *Maple* e *Derive* podem variar, dependendo da versão do *software* que esteja sendo usado.

Mathematica produz o resultado

$$\int x\sqrt{x^2 - 4x + 5} \, dx = \frac{1}{3}(x^2 - x - 1)\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sinh^{-1}(2 - x)$$

que pode ser reescrito na forma (6) usando o Teorema 8.8.4 com a identidade $\sinh^{-1}(-x) = -\sinh^{-1}x$ (verifique).

Os sistemas algébricos computacionais, por vezes, produzem respostas inconvenientes ou não-naturais para os problemas de integração. Por exemplo, quando o *Mathematica*, o *Maple* e o *Derive* são pedidos para integrar $(x + 1)^7$, eles produzem o seguinte resultado:

$$\begin{array}{ccc} \frac{(x+1)^8}{8}, & \frac{(x+1)^8}{8}, & x + \frac{7}{2}x^2 + 7x^3 + \frac{35}{4}x^4 + 7x^5 + \frac{7}{2}x^6 + x^7 + \frac{1}{8}x^8 \\ \text{Maple} & \text{Derive} & \text{Mathematica} \end{array}$$

As respostas produzidas pelo *Maple* e pelo *Derive* estão de acordo com o cálculo manual

$$\int (x+1)^7 \, dx = \frac{(x+1)^8}{8} + C$$

que usa a substituição $u = x + 1$, $du = dx$, enquanto que a resposta produzida pelo *Mathematica* está baseada na expansão de $(x + 1)^7$ e na integração termo a termo.

PARA O LEITOR. Se você expandir as respostas produzidas pelo *Maple* e pelo *Derive*, irá descobrir que elas contêm o termo $\frac{1}{8}$, que não aparece no resultado obtido no *Mathematica*. Qual é a explicação?

No Exemplo 2(a) da Seção 9.3, mostramos que

$$\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C$$

Em contrapartida, o *Mathematica* integra isto como

$$\frac{1}{80640} (1890 \sin x - 420 \sin 3x - 252 \sin 5x + 45 \sin 7x + 35 \sin 9x)$$

e o *Maple* e o *Derive* essencialmente integram isto como

$$-\frac{1}{9} \sin^3 x \cos^6 x - \frac{1}{21} \sin x \cos^6 x + \frac{1}{105} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{315} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{315} \sin x$$

Embora os três resultados pareçam bem diferentes, eles podem ser obtidos um do outro usando identidades trigonométricas apropriadas.

SISTEMAS ALGÉBRICOS PODEM FALHAR

Todo sistema algébrico computacional tem uma biblioteca de funções que pode ser usada para construir antiderivadas. Tais bibliotecas contêm funções elementares, tais como polinômios, funções racionais, bem como várias funções não-elementares que surgem em engenharia, física e outros campos de aplicação. Se o resultado de uma integração não puder ser expresso em termos de funções na biblioteca do programa, então o programa dará alguma indicação de que ele não pode calcular a integral. Por exemplo, quando solicitado para calcular a integral

$$\int (1 + \ln x) \sqrt{1 + (x \ln x)^2} \, dx \quad (7)$$

o *Mathematica*, o *Maple* e o *Derive* respondem dispondo alguma forma de integral não-calculada como resposta, para indicar que não podem efetuar a integração.

PARA O LEITOR. Às vezes, integrais que não podem ser efetuadas por um CAS da forma como foram dadas podem ser calculadas primeiro reescrevendo-se as mesmas em uma forma diferente ou fazendo-se uma substituição. Faça uma substituição u em (7) que possibilite a você usar um CAS para calcular a integral.

Às vezes, o CAS responde expressando uma integral em termos de outra. Por exemplo, se você tentar integrar e^{x^2} usando o *Mathematica*, o *Maple* ou o *Derive*, você irá obter uma

expressão envolvendo erf (que significa *função erro*). Esta função está definida como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

de tal forma que os três programas, basicamente, não fazem mais do que expressar a integral dada em termos de outra estreitamente relacionada.

Exemplo 7

Uma partícula se move ao longo do eixo x de tal forma que a sua velocidade $v(t)$ no instante t é

$$v(t) = 30 \cos^7 t \sin^4 t \quad (t \geq 0)$$

Faça o gráfico da curva de posição *versus* tempo para a partícula, uma vez que ela está em $x = 1$ quando $t = 0$.

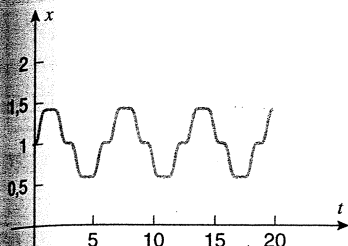


Figura 9.6.2

Solução. Uma vez que $dx/dt = v(t)$, a função posição $x(t)$ é obtida por integração da função velocidade. Iremos efetuar a integração usando o *Mathematica*, mas o procedimento seria o mesmo para o *Maple* ou o *Derive*. Integrando-se $v(t)$ e adicionando-se a constante que está faltando à integração, temos

$$\begin{aligned} x &= \int 30 \cos^7 t \sin^4 t \, dt \\ &= \frac{1}{39424} (16170 \sin t - 2310 \sin 3t - 2541 \sin 5t - 165 \sin 7t + 385 \sin 9t \\ &\quad + 105 \sin 11t) + C \end{aligned}$$

Uma vez que $x = 1$ se $t = 0$, substituindo estes valores na equação, tem-se $C = 1$. Assim, com esse valor para C , o gráfico de x *versus* t é conforme o que está na Figura 9.6.2. ♦

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 9.6 CAS

Nos Exercícios 1-24:

- (a) Use a Tabela de Integrais do Final para calcular a integral.
(b) Se você tem um CAS, use-o para calcular a integral e, então, prove que o resultado é equivalente ao que foi obtido no item (a).

1. $\int \frac{3x}{4x-1} dx$
2. $\int \frac{x}{(2-3x)^2} dx$
3. $\int \frac{1}{x(2x+5)} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2(1-5x)} dx$
5. $\int x\sqrt{2x-3} dx$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx$
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{4-3x}} dx$
8. $\int \frac{1}{x\sqrt{3x-4}} dx$
9. $\int \frac{1}{5-x^2} dx$
10. $\int \frac{1}{x^2-9} dx$
11. $\int \sqrt{x^2-3} dx$
12. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2} dx$
13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} dx$
14. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-2}} dx$

15. $\int \sqrt{9-x^2} dx$
16. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$
17. $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} dx$
18. $\int \frac{1}{x\sqrt{6x-x^2}} dx$
19. $\int \sin 3x \sin 2x dx$
20. $\int \sin 2x \cos 5x dx$
21. $\int x^3 \ln x dx$
22. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
23. $\int e^{-2x} \sin 3x dx$
24. $\int e^x \cos 2x dx$

Nos Exercícios 25-36:

- (a) Faça a substituição u indicada e, então, use a Tabela de Integrais do Final para calcular a integral.
(b) Se você tem um CAS, use-o para calcular a integral e, então, prove que o resultado é equivalente ao encontrado no item (a).

25. $\int \frac{e^{4x}}{(4-3e^{2x})^2} dx, u = e^{2x}$
26. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin 2x)(3-\sin 2x)} dx, u = \sin 2x$

75. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$

76. $y = \sqrt{9x^2 - 4}$, $y = 0$, $x = 2$

77. $y = \frac{1}{25 - 16x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

78. $y = \sqrt{x} \ln x$, $y = 0$, $x = 4$

Nos Exercícios 79-82, use qualquer método para encontrar o volume do sólido gerado quando a região encerrada pelas curvas é feita girar em torno do eixo y .

79. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/2$

80. $y = \sqrt{x - 4}$, $y = 0$, $x = 8$

81. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$

82. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 5$

Nos Exercícios 83 e 84, use qualquer método para encontrar o comprimento do arco da curva.

83. $y = 2x^2$, $0 \leq x \leq 2$

84. $y = 3 \ln x$, $1 \leq x \leq 3$

Nos Exercícios 85 e 86, use qualquer método para encontrar a área da superfície gerada fazendo a curva girar em torno do eixo x .

85. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

86. $y = 1/x$, $1 \leq x \leq 4$

Nos Exercícios 87 e 88, é dada a informação sobre o movimento de uma partícula ao longo de um eixo.

(a) Use um CAS para encontrar a função de posição da partícula para $t \geq 0$. Você pode aproximar as constantes de integração, quando necessário.

(b) Faça o gráfico da curva de posição *versus* tempo.

87. $v(t) = 20 \cos^6 t \sin^3 t$, $s(0) = 2$

88. $a(t) = e^{-t} \sin 2t \sin 4t$, $v(0) = 0$, $s(0) = 10$

89. (a) Use a substituição $u = \tan(x/2)$ para mostrar que

$$\int \sec x \, dx = \ln \left| \frac{1 + \tan(x/2)}{1 - \tan(x/2)} \right| + C$$

e demonstre que isto está em conformidade com a fórmula (22) da Seção 9.3.

(b) Use o resultado do item (a) para mostrar que

$$\int \sec x \, dx = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$$

90. Use a substituição $u = \tan(x/2)$ para mostrar que

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C$$

e confirme que isto está em conformidade com o resultado do Exercício 61 (a) da Seção 9.3.

91. Ache uma substituição que possa ser usada para integrar uma função racional de $\sinh x$ e $\cosh x$ e use a sua substituição para calcular

$$\int \frac{dx}{2 \cosh x + \sinh x}$$

sem expressar a integral em termos de e^x e e^{-x} .

9.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA; REGRA DE SIMPSON

O procedimento usual para calcular uma integral definida é encontrar uma antiderivada do integrando e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Porém, se uma antiderivada do integrando não puder ser encontrada, então precisamos procurar uma aproximação numérica da integral. Em seções anteriores, discutimos três procedimentos para aproximar áreas usando somas de Riemann – aproximação pelo extremo esquerdo, aproximação pelo extremo direito e aproximação pelo ponto médio. Nesta seção, vamos adaptar estas idéias para aproximar integrais definidas em geral e discutir novos métodos de aproximação, que, freqüentemente, fornecem uma maior precisão com menos cálculo.

UMA REVISÃO DAS APROXIMAÇÕES PELA SOMA DE RIEMANN

Lembre, da Fórmula (6) da Seção 7.5, que a integral definida de uma função f em um intervalo $[a, b]$ está definida por

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$$

onde a soma que aparece no lado direito é chamada de soma de Riemann. Nesta fórmula, o intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos de comprimento $\Delta x = (b-a)/n$ e x_k^* denota um ponto arbitrário