Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01009 - Métodos Aplicados de Matemática I
Recuperação Geral 2015/2

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Essa prova tem duração de 1h40min. (2) Calculadoras não podem ser usadas; você pode escrever à lapis. (3) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente. (4) Nesta prova: e = número de Euler. Apresente desenvolvimento matemático em todas as questões.

Questão 1. (3.0pt) RESOLVA 2 problemas, determinando soluções explícitas $y = y(x)$, SE que possível.

(a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + xy^2 = 0 & ,x > 1 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x^2\frac{dy}{dx} = y - xy = 0 & ,x > 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^x + y}{2 + x + ye^y} & ,x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 - x^3}{xy^2} & ,x > 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Questão 2. Considere a EDO $y'' - 16y = 2e^{4x}$

(a)(1.0pt) Resolva a respectiva EDO homogênea.

(b)(1.0pt) Encontre uma solução particular y_p (indique o método usado) e determine a solução geral.

Questão 3. (2.0pt) Escreva na forma matricial, e RESOLVA:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y - 7 \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - y + 2 \end{cases}$$

Questão 4.(3.0pt) ESCOLHA E RESOLVA, usando a transformada de Laplace, 2 dos ítens abaixo:

(a) $\begin{cases} y' - y = 2e^{5t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 4y = \mathcal{U}(t-2) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' - y = t^2e^t \\ y(0) = -2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = t \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$

Bom Trabalho.

Formulário no verso.

Formulário para Área 1

$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \Leftrightarrow y_p = e^{-\int P(x)dx} \displaystyle\int e^{\int P(x)dx} f(x)dx$

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ possíveis fatores integrantes: $\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ e $\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, y_1$ solução conhecida $\Leftrightarrow y_2 = y_1(x) \displaystyle\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), y_1, y_2$ soluções conhecidas $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$ onde $u_1 = -\displaystyle\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx, \;\; u_2 = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx$

Formulário para Área 2

Teorema 8.2.3. Seja $\lambda_i = \alpha + i\beta$ um autovalor complexo da matriz de coeficientes A no sistema homogêneo $X' = AX$ e sejam K_1 e K_2 os respectivos autovetores, $B_1 = Re(K_1)$, $B_2 = Im(K_1)$. Então

$$X_1 = [B_1 \cos(\beta t) - B_2 \text{sen}\,(\beta t)]e^{at}$$
$$X_2 = [B_2 \cos(\beta t) + B_1 \text{sen}\,(\beta t)]e^{at}$$

são soluções linearmente independentes no intervalo $(0, \infty)$.

$X'(t) = AX(t) + F(t) \Rightarrow X_p = \Phi(t) \displaystyle\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$, onde $\Phi(t)$ é a matriz fundamental de $X' = AX$.

$e^{At} = I + At + A^2 \dfrac{t^2}{2} + \ldots + A^k \dfrac{t^k}{k!} + \ldots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$

$X'(t) = AX(t) + F(t) \Rightarrow X_p = e^{At}C + e^{At} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-As}F(s)ds$

Transformadas de Laplace: supomos $e^{-st}f(t) \to 0$ ao $t \to \infty$, $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$

$\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$	$\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$
$\mathcal{L}\{\text{sen}\,kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$	$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$
$\mathcal{L}\{e^{at}f\} = F(s-a)$	$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$	$\mathcal{L}\{t^n f\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$
$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$	$\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(s)ds\right\} = \dfrac{\mathcal{L}\{f\}}{s}$	$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)} - f^{(n-1)}(0)$

$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & ,0 \le t < a \\ 1 & ,t \ge a \end{cases}$ é a função degrau unitário. $\delta(t-t_0)$ é o impulso unitário em $t = t_0$.