

# Observadores Funcionais para Sistemas de Primeira Ordem Generalizados

**Autores:** João Batista da Paz Carvalho (carvalho@mat.ufrgs.br)

Julio Cesar Claeysen (julio@mat.ufrgs.br)

Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## Organização

1. Introdução
2. Um Observador Funcional Generalizado
3. Algoritmo para Determinação dos Parâmetros
4. Exemplo Numérico
5. Conclusão

## 1. Introdução

Um modelo contínuo generalizado de primeira ordem tem a forma:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $E, A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ .

No caso particular em que  $E = I$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Para o controle de sistemas (2) via realimentação de estado, implementamos uma lei de controle

$$u(t) = v(t) - Kx(t), \tag{3}$$

onde o

- $v(t)$  representa uma ação de controle externa ao sistema,
- $Kx(t)$  representa a realimentação usando a variável de estado,
- $K$  é a matriz de realimentação (*feedback*)

Teoria de *estimação de estado*: construção de um sistema observador

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + XBu(t) \quad (4)$$

com a propriedade que  $z(t) \rightarrow Xx(t)$  ao  $t \rightarrow \infty$ , onde  $X$  é uma solução da equação do Observador de Sylvester

$$XA - FX = GC \quad (5)$$

para alguma matriz estável  $F$ .

Estimativa  $\hat{x}(t)$  pode ser calculada:

$$\begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

no caso de um sistema observador de ordem reduzida [6].

Essa abordagem foi recentemente estendida para sistemas generalizados de primeira ordem através da solução da equação do Observador Generalizado de Sylvester [4].

**Entretanto, um dos grandes problemas que ainda persistem é que o sistema (6) pode ser extremamente mal condicionado, trazendo sérias limitações a esse caminho.**

Essa é a grande motivação para o desenvolvimento de observadores funcionais, cuja fundamentação básica é

**estimar diretamente o vetor  $Kx(t)$ , sem estimar o vetor de estado  $x(t)$ .**

A estratégia básica é a construção , por blocos, de um tripla de soluções  $(X, F, G)$  da equação do Observador de Sylvester

$$XA - FX = GC$$

com a propriedade adicional

$$X_1 = K - G_1C \tag{7}$$

onde  $X_1$  e  $G_1$ , com as dimensões adequadas, são blocos que formam as matrizes  $X$  e  $G$ , respectivamente.

## 2. Um Observador Funcional Generalizado

Sejam  $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  sob a hipótese que o sistema (1) é observável.

Nossa estratégia será construir uma solução  $(X, F, G)$  de

$$XA - FXE = GC \quad (8)$$

com a propriedade adicional

$$K = X_1 E - G_1 C \quad (9)$$

para alguma matriz  $G_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$  a ser determinada.

Para tal, nos propomos a construir uma solução da forma

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_s \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_{11} & I & & \\ & F_{22} & I & \\ & & \dots & I \\ & & & F_{ss} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_2 \\ G_3 \\ \dots \\ G_{s+1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

e  $X_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $F_{ii} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $G_{i+1} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ .

Dois tipos de observador funcional podem então ser construídos. O resultado principal comum é que

$$z(t) - XEx(t) \rightarrow 0 \quad \text{ao } t \rightarrow \infty \quad (11)$$

onde  $(X, F, G)$  é uma solução de (8) e  $z$  é a variável de estado do sistema (4), chamado de *sistema observador*.

### Observador de Ordem Reduzida.

Assumindo  $r = m$  (isto é, que o número de entradas é igual ao número de saídas) e  $n - r = s \cdot m$ , onde  $s$  é um inteiro positivo, soluções  $X \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  e  $G \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$  de (8), onde  $F$  é uma matriz estável, podem ser construídas.

### Observador de Ordem Integral.

Assumindo  $n = s \cdot m$ , onde  $s$  é um inteiro positivo, soluções  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $G \in \mathbb{R}^{n \times r}$  de (8), onde  $F$  é uma matriz estável, podem ser construídas.

Dessa forma, em qualquer um dos casos,

$$Kx(t) = X_1 E x(t) - G_1 C x(t) \quad (12)$$

e como consequência de (11),

$$Kx(t) - (z_m(t) - G_1 y(t)) \rightarrow 0 \text{ ao } t \rightarrow \infty, \quad (13)$$

onde  $z_m$  contém as primeiras  $m$  componentes do vetor  $z$ .

Substituindo (10) em (8) resulta

$$X_1 E = K - G_1 C \quad (14)$$

$$X_{i+1} E = X_i A - F_{ii} X_i E - G_{i+1} C, i = 1, 2, \dots, s - 1 \quad (15)$$

$$0 = X_{s+1} = X_s A - F_{ss} X_s E - G_{s+1} C. \quad (16)$$

Pós-multiplicando as equações acima por  $D_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , e combinando recursivamente, permite-nos estabelecer o seguinte resultado:

**Lema:** Para  $i = 1, 2, \dots, s + 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, s + 1$ , temos

$$X_i E D_j = K_{ij} - \sum_{\ell=0}^{i-1} G_{i\ell} C D_{j+\ell} \quad (17)$$

onde

$$K_{i+1,j} = K_{i,j+1} - F_{ii} K_{ij} \quad (18)$$

$$G_{i+1,j} = G_{i,j-1} - F_{ii} G_{ij} \quad (19)$$

e

$$K_{1j} = K D_j \quad (20)$$

$$G_{i,-1} = G_{i+1}, G_{i+1,i} = G_{i,i-1} \quad (21)$$

**Prova:** omitida.



**Consequência:** podemos calcular os blocos  $G_{ij}$  por

$$K_{s+1,0}E = \begin{bmatrix} G_{s+1,0} & G_{s+1,1} & \dots & G_{s+1,s-1} & G_{s+1,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CD_0E \\ CD_1E \\ \dots \\ CD_sE \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Observamos que a matriz de coeficientes do sistema de equações lineares acima tem dimensão  $r(s+1) \times n$ . No caso de um observador de ordem reduzida, como assumimos  $r = m$ , essa matriz será quadrada. No caso de um observador integral, se  $r > m$ , o sistema terá mais incógnitas do que equações e então técnicas usando Decomposição em Valores Singulares (SVD) podem ser usadas para encontrar solução para esse sistema.

Uma observação importante, bastante verificada na prática, é que esse sistema linear pode ser extremamente mal-condicionado; entretanto, pode ser mostrado que tal se traduz numa propriedade relativa à observabilidade do sistema, sobretudo no que toca ao posicionamento dos sensores.

### Um Algoritmo para Construção dos Parâmetros do Observador

**Entrada:** Matrizes  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , onde  $r = m$ .

**Saída:** Matrizes  $X, F, G$  e  $G_1$  tais que  $XA - FXE = GC$  e  $K = X_1E - G_1C$ .

**Hipótese:** O sistema é observável.

1. Dependendo da escolha de um observador de ordem reduzida ou não, encontre o parâmetro  $s$  adequado. Observador de ordem reduzida requer  $r = m$ .

2. Calcule  $D_0, D_1, \dots, D_{s+1}$  resolvendo os sistemas lineares

$$ED_0 = I, \quad ED_{i+1} = AD_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, s$$

onde  $I$  denota a matriz identidade de dimensão  $n$ .

3. Determine os blocos  $F_{ii}, i = 1, 2, \dots, s$  convenientemente, mas de tal forma que a matriz  $F$  tenha autovalores com parte real negativa.

4. Calcule  $K_{1j} = KD_j, j = 0, 1, 2, \dots, s$ . Para  $i = 1, 2, \dots, s$ , calcule

$$K_{i+1,j} = K_{i,j+1} - F_{ii}K_{ij}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, s - i.$$

5. Encontre uma solução para o sistema linear

$$K_{s+1,0}E = \begin{bmatrix} G_{s+1,0} & G_{s+1,1} & \dots & G_{s+1,s-1} & G_{s+1,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CD_0E \\ CD_1E \\ \dots \\ CD_sE \end{bmatrix}$$

nas incógnitas matriciais  $G_{s+1,0}, \dots, G_{s+1,s}$ .

6. Defina  $G_1 = G_{s+1,s}$  e calcule

$$\begin{aligned} G_{i,i-1} &= G_{i+1,i} \\ G_{i,j-1} &= G_{i+1,j} + F_{ii}G_{ij}, j = i-1, i-2, \dots, 1 \\ G_{i+1} &= G_{i+1,0} + F_{ii}G_{i,0} \end{aligned} \quad (23)$$

para  $i = s, s-1, \dots, 2, 1$ .

7. Calcule  $X_1, X_2, \dots, X_s$  a partir dos sistemas lineares

$$\begin{aligned} X_1E &= K - G_1C \\ X_{i+1}E &= X_iA - F_{ii}X_iE - G_{i+1}C, i = 1, 2, \dots, s-1. \end{aligned}$$

8. Forme as matrizes  $X, F$  e  $G$  a partir dos blocos calculados acima.

### 3. Exemplo Numérico

Considere o problema de controle, por realimentação de estado

$$u(t) = v(t) - K_1x(t) - K_2\dot{x}(t),$$

de um sistema de vibrações não -amortecidas

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) + \mathbf{K}x(t) = B_0u(t)$$

$$y(t) = C_1x(t) + C_2\dot{x}(t)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} .1621 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & .1621 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & .1621 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & .0797 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & .0797 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & .0797 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 31.431 & 0. & 0. & -8.686 & 5.634 & 0. \\ 0. & 107.290 & 0. & 5.634 & -3.655 & 0. \\ 0. & 0. & 14.06 & 0. & 0. & 0. \\ -8.686 & 5.634 & 0. & 56.945 & -5.634 & 0. \\ 5.634 & -3.655 & 0. & -5.634 & 3.655 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 4.986 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0.1000 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.1000 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.1000 & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$C_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0.1000 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.1000 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.1000 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -0.0018 & -0.0590 & -0.0678 \\ 0.0358 & 0.6454 & -0.8149 \\ -0.0028 & -0.0087 & -0.0599 \\ 0.0007 & 0.1640 & -0.0732 \\ -0.0009 & -0.0388 & 0.0428 \\ 0.0203 & -0.0053 & 0.1030 \end{bmatrix}^T$$

$$Z_2 = 10^{-1} \begin{bmatrix} -0.0200 & 0.0431 & -0.1381 \\ -0.1962 & -0.0224 & 0.2677 \\ 0.0011 & -0.0225 & -0.0769 \\ -0.0056 & -0.0256 & 0.0069 \\ 0.0015 & 0.0110 & -0.0418 \\ 0.0019 & -0.0069 & 0.0264 \end{bmatrix}^T$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 750. & 0. & 0. \\ 230. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 340. \\ 0. & 460. & 0. \\ 0. & 0. & 200. \\ 210. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

Esse sistema é então escrito na forma (1), onde

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & -\mathbf{K} \end{bmatrix}$$

$$C = [C_2 \ C_1], \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}$$

e ainda

$$K = [ K_2 \ K_1 ].$$

O algoritmo proposto constrói matrizes  $X = [ X_e \ X_c \ X_d ]$ ,  $F$ ,  $G_1$  e  $G$  tais que

$$X_e = \begin{bmatrix} 36.116 & 12.831 & -0.227 & 0.009 \\ 38.191 & 11.724 & 0.740 & 2.058 \\ -100.104 & -34.848 & -2.141 & -0.919 \\ 3198.954 & -460.496 & 5.254 & -50698.674 \\ 3769.647 & -535.307 & -6.424 & -54904.629 \\ -8470.822 & 1541.186 & 127.524 & 140606.906 \\ -48827.556 & 5036.965 & -48.303 & -415591.689 \\ -66441.912 & 6697.898 & -6.771 & -466661.598 \\ 174207.629 & -20428.207 & -1771.544 & 712024.673 \end{bmatrix}$$

$$X_c = \begin{bmatrix} -0.012 & 0.255 & -0.012 & -0.121 \\ -0.487 & -0.067 & 0.027 & -0.014 \\ 0.537 & 1.293 & -0.085 & 0.165 \\ 4014.779 & 27.053 & 36.091 & 12.589 \\ 4816.024 & -100.758 & 38.297 & 11.669 \\ -11536.921 & 231.181 & -100.615 & -33.857 \\ -82000.781 & -480.235 & 3487.683 & -359.783 \\ -104851.133 & -57.956 & 4152.620 & -418.619 \\ 278887.840 & -13311.417 & -9678.202 & 1134.900 \end{bmatrix}$$



$$G = 10^3 \begin{bmatrix} -12.7525 & -228.5047 & -0.9346 \\ 4.9581 & -288.2660 & 1.7161 \\ -140.7153 & 619.2118 & -22.0917 \\ -2845.9025 & 6172.0966 & 17.8174 \\ -2850.4733 & 8814.4304 & -18.9432 \\ 9024.0583 & -22870.5073 & 569.4441 \\ -47097.4452 & -62414.3995 & -158.1532 \\ -58353.5923 & -96325.2710 & -23.5151 \\ 105428.7038 & 277332.5223 & -6553.8930 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -5857.4639 & -2044.6208 & 33.9974 \\ -6251.0656 & -1255.4738 & -128.6798 \\ 16162.5824 & 4835.1980 & 287.2046 \end{bmatrix}$$

verificando (**Matlab**)

$$\|XA - FXE - GC\|_F = 5.6520 \times 10^{-9}$$

$$\|K - X_1E - G_1C\|_F = 2.2890 \times 10^{-16}.$$



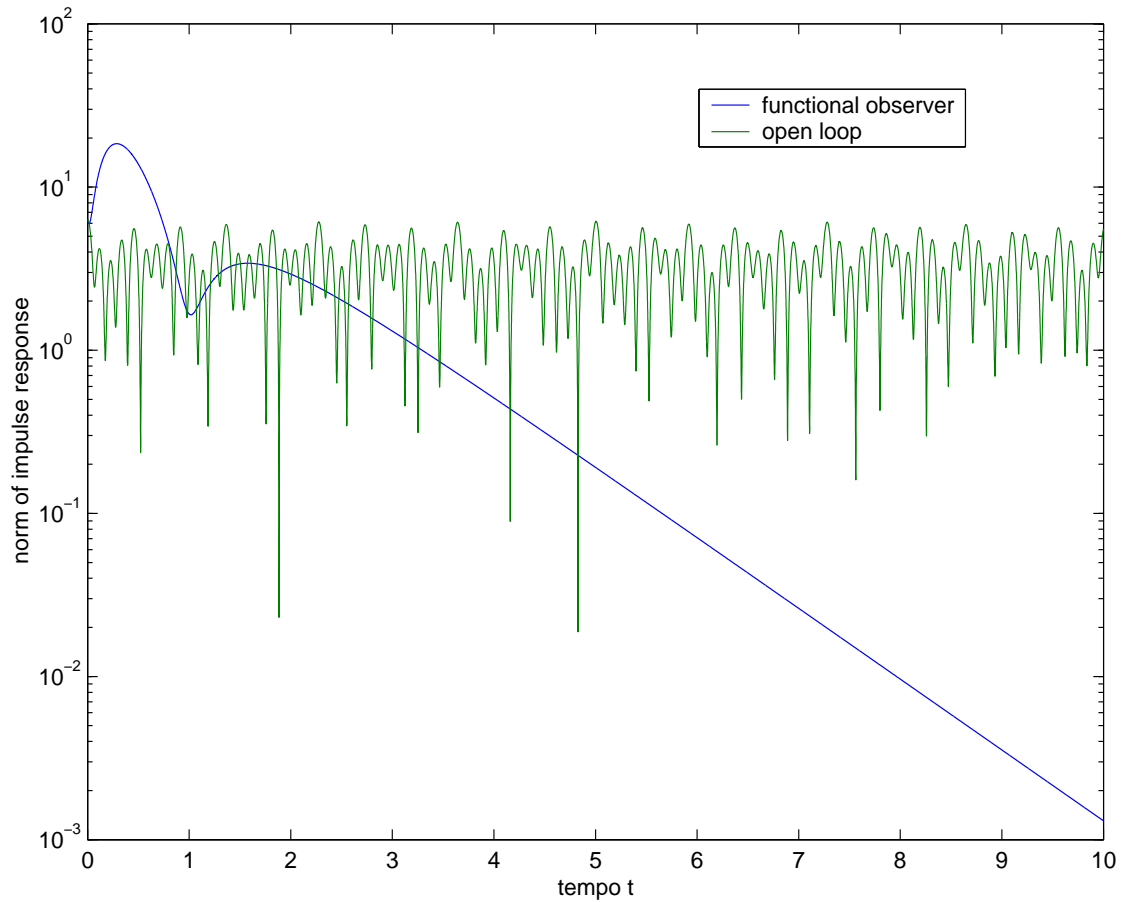


Figura 1: Magnitudes das respostas impulso, em escala logarítmica, para o sistema do Exemplo 1.

A figura 1 mostra a norma das respostas impulso do sistema nos casos: (i) sem controle (laço aberto) e (ii) com controle via realimentação de estado usando o observador funcional. Vemos que a estratégia de controle através de um observador funcional foi bem sucedida.

## Conclusão

- A teoria dos observadores funcionais propõe a estimação direta do vetor de realimentação, ao invés da estimação do vetor de estado, para o caso de sistemas clássicos de primeira ordem.
- Em circunstâncias onde a construção de observadores de Luenberger é computacionalmente inviável devido ao mal-condicionamento do sistema linear que calcula a aproximação da variável de estado, o uso de observadores funcionais aparece como uma alternativa.
- Neste trabalho, uma generalização da teoria dos observadores funcionais foi desenvolvida para o caso de sistemas generalizados de primeira ordem. Esses sistemas podem ser realizações de sistemas vibratórios de segunda ordem, e portanto os resultados obtidos podem ser usados para o controle, via realimentação de estado, desses últimos.
- Faz-se necessária, uma análise de estabilidade numérica para o algoritmo proposto.

## Referências

- [1] J. Carvalho, *State Estimation and Finite Element Model Updating for Vibrating Systems*. Tese de Dout., Northern Illinois Univ., 2002.
- [2] J. Carvalho and B. Datta, *An Algorithm for Reduced-Order State Estimation of Descriptor Systems*. Proc. IEEE CDC, Las Vegas, Dec 10-13, 2002.
- [3] C-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd ed, Oxford Univ. Press, NY, 1999.
- [4] B. Datta and D. Sarkissian, *Block Algorithms for State Estimation and Functional Observers*. Proc. 2000 IEEE Int. Symp. CACSD, Alaska, pp 19-23, 2000.
- [5] J. Claeysen, *On Predicting the Response of Non-conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions*. Journal of Sound and Vibration, **140**, pp 73-84, 1990.
- [6] D. Luenberger, *Observing the State of a Linear System*. IEEE Trans. Mil. Electr., **8**, pp 74-80, 1964.