

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A
Solução da Segunda Verificação : Fila B - 2004/1

Questão 1. (2.5 pontos) Calcule

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x)^{\frac{5}{1-x}}$

(b) $\int x^3 \ln(x) dx$

(c) $\int (4x + 3)^{-15} dx$

Solução :

(a) Temos uma indeterminação do tipo 1^∞ . Seja

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x)^{\frac{5}{1-x}}$$

como a função logaritmo é contínua em seu domínio:

$$\ln(L) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} (x)^{\frac{5}{1-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left((x)^{\frac{5}{1-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 \ln(x)}{1-x}$$

e temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Aplicando L'Hopital:

$$\ln(L) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5/x}{-1} = -5$$

e assim $L = e^{-5} = 1/e^5$.

(b) Integração por Partes:

$$u = \ln(x) \quad , \quad du = dx/x$$
$$dv = x^3 \quad , \quad v = \frac{x^4}{4}$$

e assim

$$\int x^3 \ln(x) dx = \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C$$
$$\int x^3 \ln(x) dx = \frac{x^4 \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C, x > 0.$$

(c) Substituição $u = 4x + 3, du = 4dx,$

$$\int (4x + 3)^{-15} dx = \int (u)^{-15} \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u^{-15} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{-14}}{-14} + C$$

e assim

$$\int (4x + 3)^{-15} dx = -\frac{u^{-14}}{56} + C = -\frac{(4x + 3)^{-14}}{56} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Questão 2. (2.0 pontos) Dada a função

$$f(x) = \frac{e^x}{(x-3)^2}.$$

(a) Determine os intervalos onde o gráfico de f é crescente e os intervalos onde o gráfico de f é decrescente.

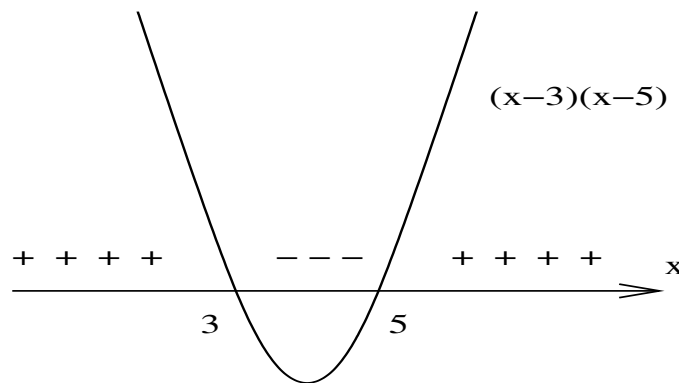
(b) Verifique se o gráfico de f possui assíntotas horizontais. Em caso afirmativo, determine a equação de cada uma delas.

Solução :

Observamos que $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ é o domínio dessa função .

$$f'(x) = \frac{(x-3)^2 e^x - e^x(2)(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{e^x(x-3)(x-3-2)}{(x-3)^4} = \frac{e^x(x-3)(x-5)}{(x-3)^4}$$

$(x-3)^4 > 0$ e $e^x > 0 \implies$ sinal de $f'(x) =$ sinal de $(x-3)(x-5)$



$f'(x) > 0$ no intervalo $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$: $f(x)$ é crescente neste intervalo.

$f'(x) < 0$ no intervalo $(3, 5)$: $f(x)$ é decrescente neste intervalo.

(b) Aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(x-3)^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{LH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(x-3)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{LH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

e não existe assíntota horizontal à direita.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(x-3)^2} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

e assim $y = 0$ é assíntota horizontal à esquerda.

Questão 3. (2.0 pontos) Considere a função

$$f(x) = -7 + 5x + 5 \cos(x), 0 \leq x \leq 2\pi.$$

- (a) Determine os máximos e os mínimos absolutos de f em $[0, 2\pi]$.
 (b) Determine todos os pontos de inflexão de f em $[0, 2\pi]$. Justifique.

Solução :

$$f'(x) = 5 - 5\text{sen}(x), f'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(x) = 1 \text{ em } [0, 2\pi] \Rightarrow x = \pi/2$$

x	$f(x)$
0	$-7 + 5(1) = -2$
$\pi/2$	$-7 + 5\pi/2 + 5(0) = 5\pi/2 - 7$
2π	$-7 + 5(2\pi) + 5(1) = 10\pi - 2$

observamos

$$\begin{aligned} f(2\pi) &= 10\pi - 2 > 10(3) - 2 = 28 \\ f(\pi/2) &= \frac{5\pi}{2} - 7 < \frac{5(4)}{2} - 7 = 3 \\ f(\pi/2) &= \frac{5\pi}{2} - 7 > \frac{5(3)}{2} - 7 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e assim $f(0) < f(\pi/2) < f(2\pi)$.

O mínimo absoluto no intervalo $[0, 2\pi]$ é -2 .

O máximo absoluto no intervalo $[0, 2\pi]$ é $10\pi - 2$.

Questão 4. (1.5 pontos) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \text{arctg}(7x)$ em $x = 1/7$.

Solução :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + (7x)^2} \cdot 7 \\ f'(1/7) &= 7 \cdot \frac{1}{1 + (1)^2} = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \\ f(1/7) &= \text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow y - \frac{\pi}{4} &= \frac{7}{2} \left(x - \frac{1}{7} \right) \end{aligned}$$

é a equação pedida.

Questão 5. (1.0 pontos) Seja f uma função derivável em \mathbb{R} e $g(x) = 2f^3(x) - 6$. Sabendo que

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ em } (2, +\infty), \quad f'(x) > 0 \text{ em } (-\infty, 2) \\ f(2) &= 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1. \end{aligned}$$

(a) Determine os intervalos de crescimento e os intervalos de decrescimento do gráfico de g ;

(b) esboce um possível gráfico de g .

Solução :

(a) Regra da Cadeia: $g'(x) = 6f^2(x)f'(x)$

Como $f^2(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, segue que o sinal de $g'(x)$ é o mesmo sinal de $f'(x)$ nos pontos onde $f(x) \neq 0$.

- Como $f'(x) < 0$ em $(2, +\infty)$, $f(2) = 2$ e $f(x) \rightarrow 1$ ao $x \rightarrow +\infty$, então $f(x) > 0$ em $(2, +\infty)$.
- Com $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 2)$, $f(x) \rightarrow -\infty$ ao $x \rightarrow -\infty$ e $f(2) = 2$, então $f(x)$ anula-se uma única vez em $(-\infty, 2)$.

Assim

- $g'(x) < 0$ no intervalo $(-\infty, 2)$, exceto em um único ponto;
- $g'(x) < 0$ no intervalo $(2, +\infty)$.

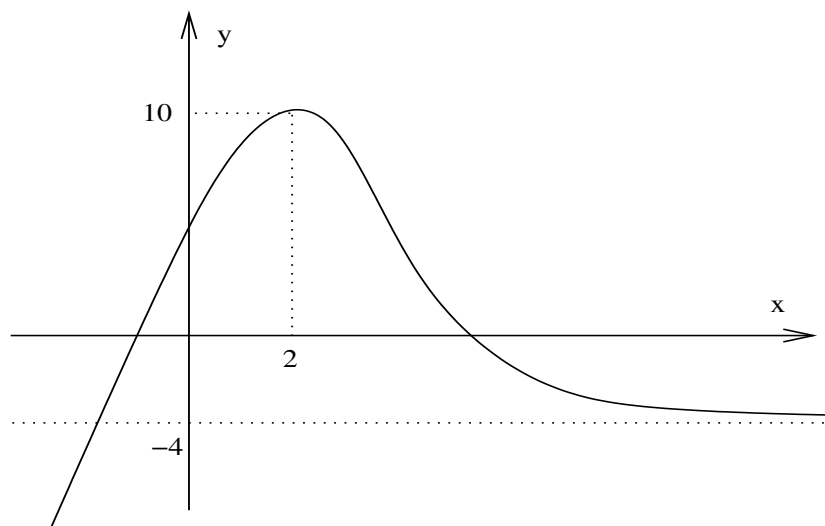
$$\begin{aligned} &\implies g(x) \text{ é crescente em } (-\infty, 2] \\ &\implies g(x) \text{ é decrescente em } [2, +\infty) \end{aligned}$$

(b) Temos

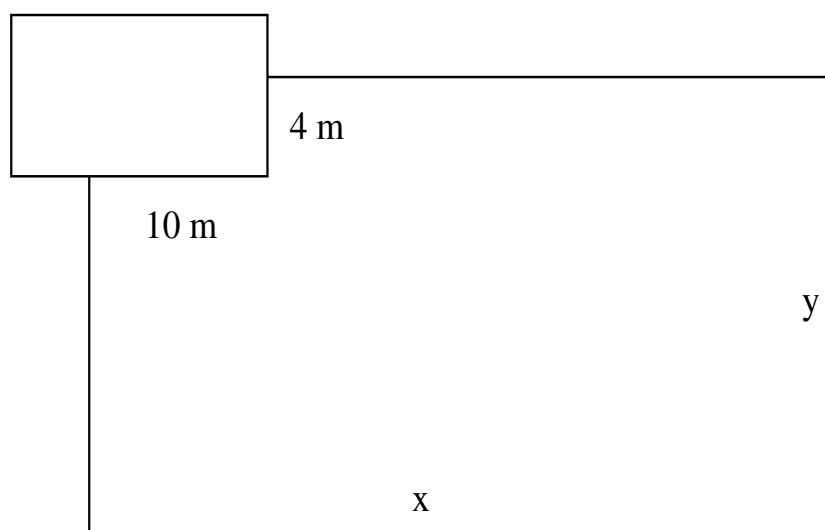
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)^3 - 6 = 2(1)^3 - 6 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)^3 - 6 = 2(-\infty)^3 - 6 = -\infty \\ g(2) &= 2f^3(2) - 6 = 2(2)^3 - 6 = 16 - 6 = 10 \end{aligned}$$

e também $g(x)$ é derivável em \mathbb{R} .

Possível gráfico de g , combinando as info acima:



Questão 6. (1.5 pontos) Um terreno com área de $360m^2$ deve ser cercado. As paredes de um prédio já construído, no terreno vizinho, serão aproveitadas segundo desenho abaixo. Determine as dimensões do terreno que minimizam a quantidade de cerca usada.



Solução : Consideraremos $x \geq 10$ conforme sugerido pela figura.

$$\text{Restrição : } xy - 10(4) = 360 \Rightarrow xy = 400$$

$$\text{Minimizar: } P = 2x - 10 + 2y - 4.$$

$$P(x) = 2x + 2\frac{400}{x} - 14$$

definido para $x > 10$ e $y = 400/x \geq 4$ ou seja, $x \leq 400/4 = 100$.

Para $x = 10$, temos $y = 360/10 = 36$ e então $P(10) = 36 + 36 + 10 = 82$ metros, ao passo que

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} P(x) = 2(10) + 2(400)/10 - 14 = 86 > P(10)$$

então $P(x)$ não é contínua em $x = 10$. Mas $P(10)$ ainda pode ser mínimo absoluto em $[10, 100]$, a testar depois.

Procuramos por mínimos absolutos de $P(x)$ no intervalo $(10, 100]$:

$$P'(x) = 2 - \frac{2(400)}{x^2}$$

pontos críticos:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{2(400)}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow y = \frac{400}{20} = 20$$
$$P'(x) \text{ não existe : } x = 0 \notin (10, 100]$$

e então $x = 20$ é o único ponto crítico em $(10, 100]$.

$$P'(x) = \frac{2(x^2 - 400)}{x^2}$$

e assim $P'(x)$ é negativa se $x < 20$ e positiva se $x > 20$. Pelo Teste da Derivada Primeira, $x = 20$ é um ponto de mínimo relativo. Como este é o único extremo relativo em $(10, 100]$, ele é também mínimo absoluto em $(10, 100]$.

Comparando com $P(10)$:

$$P(10) = 82$$
$$P(20) = 2(20) + \frac{2(400)}{20} - 14 = 40 + 40 - 14 = 66$$

e então $P(20)$ é mínimo absoluto em $[10, 100]$. As dimensões procuradas são as de um quadrado de aresta igual a 20 m.