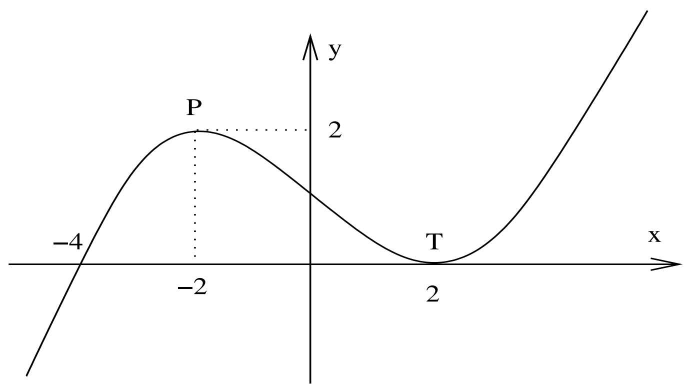
Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A
Solução da Primeira Verificação : Fila A - 2004/1

Questão 1. (1.5 pontos) Dado o gráfico da função f abaixo, use alongamentos, compressões e translações horizontais ou verticais e faça um esboço do gráfico de $y = 2f(x-2) - 1$. Indique, passo a passo, cada transformação usada e a posição dos pontos P e T.

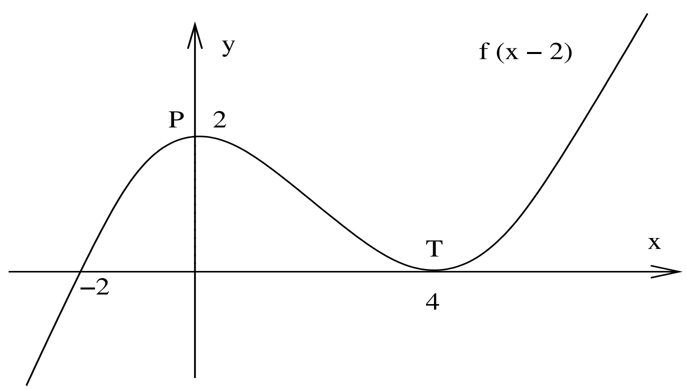


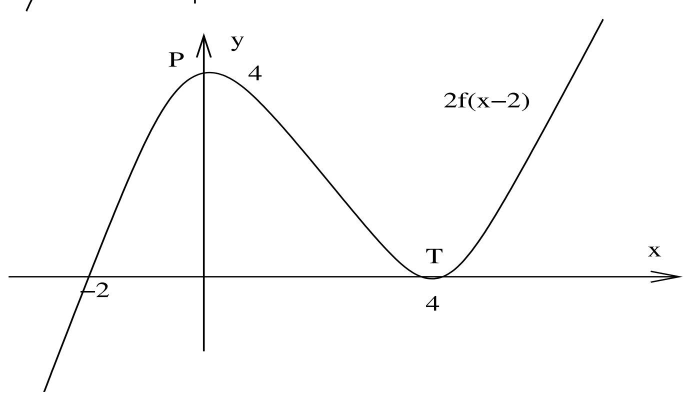
Solução :

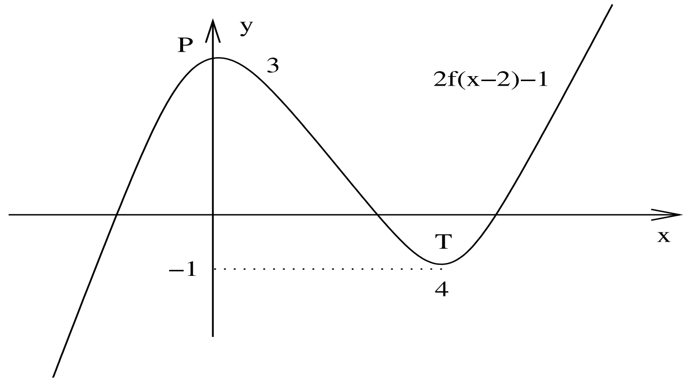
Sequência de três transformações :

$$f(x) \longmapsto f(x-2) \longmapsto 2f(x-2) \longmapsto 2f(x-2) - 1$$

1. Translação horizontal de 2 unidades para direita;
2. alongamento vertical de fator 2;
3. translação vertical de 1 unidade para baixo.







Questão 2. (1.0 pontos) Uma caixa aberta é feita a partir de um pedaço retangular de cartolina, removendo-se um cada canto um quadrado de lado x e dobrando-se as abas. Sabendo que os lados de cartolina medem $8cm$ e $6cm$, expresse o volume da caixa como função de x. Não esqueça de explicitar o domínio da função .

Solução :

V = volume da caixa.

$$V = (8-2x)(6-2x)x = 48x - 28x^2 + 48x$$

Domínio: $x \geq 0$,

$$\begin{array}{c} 8-2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 4 \\ 6-2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3 \end{array}$$

e logo $0 \leq x \leq 3$. $D(V) = [0,3]$ (a resposta $D(V) = (0,3)$ também é aceitável, pois exclui casos de caixas de volume nulo).

Questão 3. (1.5 pontos) Verifique se a função f é contínua em $x = 2$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ x^2 + 3x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Justifique sua resposta.

Solução :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} x+1 = 3$$

e

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 + 3x = (2)^2 + 3(2) = 10$$

Assim, como

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

segue que não existe o limite de $f(x)$ em $x = 2$. A função $f(x)$ não é contínua em $x = 2$.

Questão 4. (2.0 pontos)

(a) Calcule $f'(x)$ onde $f(x) = \operatorname{sen}(2x^4 - 5)$.

(b) Determine dy/dx, se $2x^3 - 2xy + y^3 = 13$.

(c) Sabendo que $g(x) = (x^2 - 3)f(x)$, $f(x) = 3$ e $f'(2) = -4$, calcule $g'(2)$.

Solução :

(a)

$$f'(x) = \cos(2x^4 - 5)\frac{d}{dx}(2x^4 - 5) = 8x^3 \cos(2x^4 - 5)$$

(b)

$$\begin{gathered} 2x^3 - 2xy + y^3 = 13 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(2x^3 - 2xy + y^3\right) = 0 \\ \Longrightarrow 6x^2 - 2x\frac{dy}{dx} - 2y + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow (3y^2 - 2x)\frac{dy}{dx} = 2y - 6x^2 \\ \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y - 6x^2}{3y^2 - 2x} \end{gathered}$$

(c)

$$\begin{gathered} g'(x) = (x^2 - 3)f'(x) + 2xf(x) \\ \Longrightarrow g'(2) = (4 - 3)f'(2) + 4f(2) = (1)(-4) + 4(3) = 8 \end{gathered}$$

Questão 5. (3.0) Dada a função

$$f(x) = \frac{x - 6}{3 - x},$$

determine:

(a) todas as assíntotas horizontais e todas as assíntotas verticais do gráfico de f;

(b) a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$;

(c) a área do triângulo formado pela reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ e as assíntotas encontradas no ítem (a).

Solução :

Assíntotas horizontais:

$$\begin{gathered} \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 6}{3 - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - 6/x}{3/x - 1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 6}{3 - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 6/x}{3/x - 1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1 \end{gathered}$$

e assim a reta $y = -1$ é assíntota horizontal, tanto à esquerda quanto à direita do gráfico de f.

Assíntototas verticais: como f é uma função contínua para $x \neq 3$, AV somente poderia existir em $x = 3$. Como o denominador $3 - x$ se aproxima de zero e o numerador $x - 6$ não se aproxima de zero ao $x \to 3$, então os limites laterais em $x = 3$ são infinitos, e assim a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

(b) Regra do Quociente:

$$f'(x) = \frac{(3-x)(1) - (-1)(x-6)}{(3-x)^2} = \frac{3 - x + x - 6}{(3-x)^2} = \frac{-3}{(3-x)^2}$$

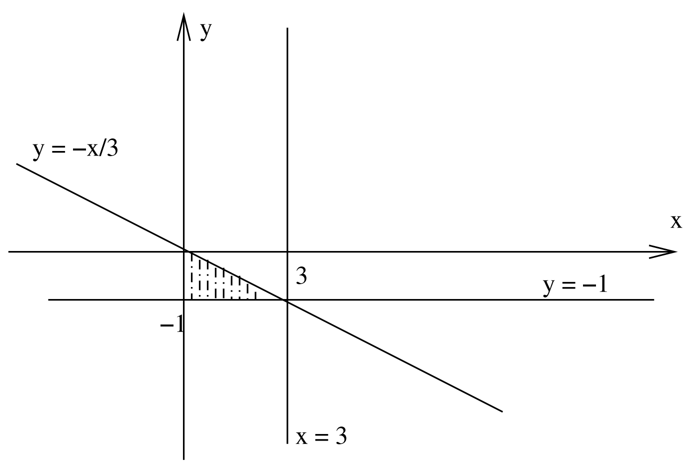
$$f(0) = \frac{0-6}{3-0} = -2$$

$$f'(0) = \frac{-3}{(3-0)^2} = -\frac{1}{3}$$

e a equação da reta tangente é

$$y - (-2) = -\frac{1}{3}(x - 0) \Longrightarrow y = -2 - \frac{x}{3}$$

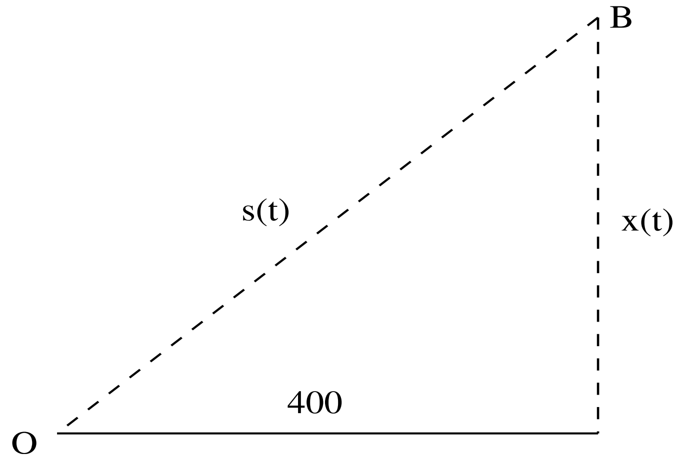
(c)



a área desse triângulo é $(1)(3)/2 = 3/2$.

Questão 6. (1.0 pontos) Um balão metereológico é lançado do solo a uma distância de $400m$ de um observador fixo no solo. Sabendo que o balão sobe verticalmente à razão de $3m/seg$, determine a taxa de variação em relação ao tempo, da distância entre o balão e o observador, quando a altura do balão é de $300m$.

Solução :



Ponto O: posição do observador; ponto B: posição do balão .

Relação entre as variáveis: $x^2 + (400)^2 = s^2$.

$$2x\frac{dx}{dt} + 0 = 2s\frac{ds}{dt}$$

quando $x = 300$, temos

$$s = \sqrt{(300)^2 + (400)^2} = 100\sqrt{3^2 + 4^2} = 500$$

e assim, quando $x(t) = 300$:

$$2(300)(3) = 2(500)\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{(300)3}{500} = \frac{9}{5}.$$

A taxa de variação da distância ao observador, em relação ao tempo, é de $\frac{9}{5}$ m/s.