Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A
Solução da Terceira Verificação : Fila A - 2003/2

Questão 1. (2.0 pontos) Calcule

(a) $\displaystyle\int \frac{-4x^2-5x-3}{x^3+2x^2+x}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

Solução :

(a) Frações Parciais: $x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$

$$\frac{-4x^2-5x-3}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2} =$$
$$= \frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$$

e assim $(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A = -4x^2-5x-3 \ \ \forall x$. Então

$$\begin{cases} A+B = & -4 \\ 2A+B+C = & -5 \\ A = & -3 \end{cases}$$

e obtemos, sucessivamente,

$$A = -3, B = -4+3 = 1 \text{ e } C = -5-2(-3)-(-1) = 2.$$

Logo

$$\int \frac{-4x^2-5x-3}{x^3+2x^2+x}dx = \int \left(\frac{-3}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right) dx$$

e então

$$\int \frac{-4x^2-5x-3}{x^3+2x^2+x}dx = -3\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{2(x+1)^{-1}}{-1} + C =$$
$$= -3\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + C$$

onde C é uma constante real qualquer.

(b) Evitando zero no denominador, fazemos a substituição :

$$x = 3\text{sen}\,(\theta), -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = 3\cos(\theta)d\theta.$$

obtendo

$$\text{sen}\,(\theta) = \frac{x}{3}\ ,\ \cos(\theta) = \sqrt{1-\text{sen}^2(\theta)} = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

Segue que

$$\int \frac{3x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{3(3\text{sen}\,\theta)^3 3\cos\theta}{3\cos\theta}d\theta = 81\int \text{sen}\,^3\theta d\theta =$$

$$81\int \text{sen}\,^2\theta\text{sen}\,\theta d\theta = 81\int (1-\cos^2\theta)\text{sen}\,\theta d\theta = 81\int \left(\text{sen}\,\theta - \cos^2\theta\text{sen}\,\theta\right)d\theta =$$

$$81\left(-\cos\theta - \frac{-\cos^3\theta}{3}\right) + C = 81\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right) + C =$$

$$81\left(\frac{(\sqrt{9-x^2})^3}{81} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C = \sqrt{(9-x^2)^3} - 27\sqrt{9-x^2} + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$.

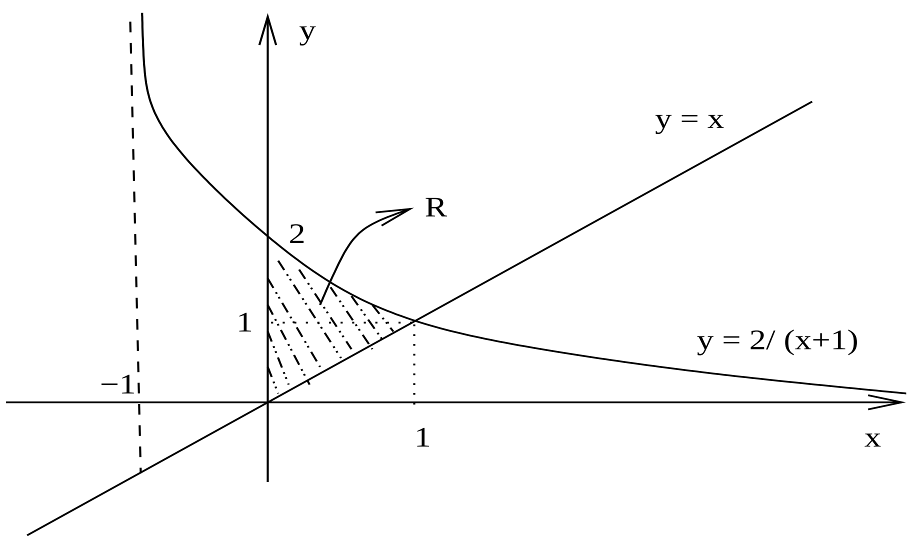
Questão 2. (2.0 pontos) Considere a curva $y = \dfrac{2}{x+1}$ e a reta $y = x$.

(a) Faça um esboço da região R, no primeiro quadrante, limitada pela curva e reta dadas acima e o eixo Y, identificando claramente todos os pontos de intersecção .

(b) Calcule a área da região R.

(c) Escreva a integral que calcula o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região R em torno do eixo Y. (não calcule)

Solução :



Pontos de intersecção entre a curva e a reta:

$$y = \frac{2}{x+1} = x \Rightarrow x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

e resolvendo a equação do segundo grau obtemos $x = 1$ e $x = -2$, e apenas o primeiro valor interessa.

Intersecção da curva com o eixo Y:

$$\frac{2}{x+1} = 2 \Rightarrow x = 0$$

Intersecção da reta com o eixo y : $x = 0$ (origem)

(b) Calculando em x:

$$A = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - x \right) dx = \left[2\ln|x+1| - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2\ln(2) - 2\ln(1) - \frac{1}{2} = 2\ln(2) - \frac{1}{2}$$

Calculando em y:

$$y = \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{2}{y} - 1$$

$$A = \int_0^1 y dy + \int_1^2 x dy = \int_0^1 y dy + \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - 1 \right) dy$$

$$A = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 + [2\ln|y| - y]_1^2 = \frac{1}{2} + 2\ln(2) - 2\ln(1) - 2 + 1 = 2\ln(2) - \frac{1}{2}$$

(c)

$$V = \int_0^1 \pi x^2 dy + \int_1^2 \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y^2 dy + \pi \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - 1 \right)^2 dy$$

Questão 3. (2.0 pontos)

(a) Determine a equação da parábola que possui vértice em $(1, 2)$ e diretriz $x = -1$.

(b) Esboçe o gráfico da hipérbole $9y^2 - 4x^2 - 36y - 24x = 36$, indicando seu centro, vértices, focos e assíntotas.

Solução :

(a) $V(1, 2)$, diretriz $x = 1 \Longrightarrow$ o eixo de simetria é paralelo ao eixo x, e $p = 2$. Temos então

$$(y-2)^2 = 4(2)(x-1) \Leftrightarrow (y-2)^2 = 8(x-1)$$

(b) Completamento de quadrados:

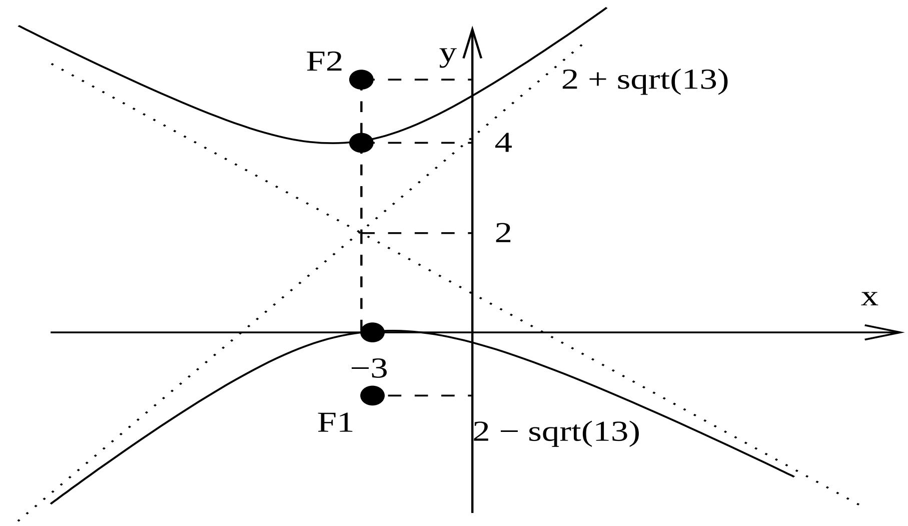
$$9y^2 - 4x^2 - 36y - 24x = 36 \Leftrightarrow 9y^2 - 36y - 4x^2 - 24x = 36$$
$$9(y^2 - 4y) - 4(x^2 + 6x) = 36 \Leftrightarrow 9(y^2 - 4y + 4) - 4(x^2 + 6x + 9) = 36 + 36 - 36$$
$$9(y-2)^2 - 4(x+3)^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{(y-2)^2}{36/9} - \frac{(x+3)^2}{36/4} = 1$$
$$\frac{(y-2)^2}{2^2} - \frac{(x+3)^2}{3^2} = 1$$

e imediatamente vemos uma hipérbole com $C(-3, 2), a = 2, b = 3$ (eixo principal paralelo ao eixo Y)

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$$

e assim

$$V_1(-3, 2-2) = V_1(-3,0) \text{ e } V_2(-3,2+2) = V_2(-3,4)$$
$$F_1(-3, 2-\sqrt{13}) \text{ e } F_2(-3, 2+\sqrt{13})$$



Questão 4. (2.0 pontos)

(a) (0.5 pontos) A integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ é uma integral imprópria ? Justifique.

(b) (1.5 pontos) Calcule a área da região determinada pelo gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}},$$

sua assíntota vertical e os eixos coordenados.

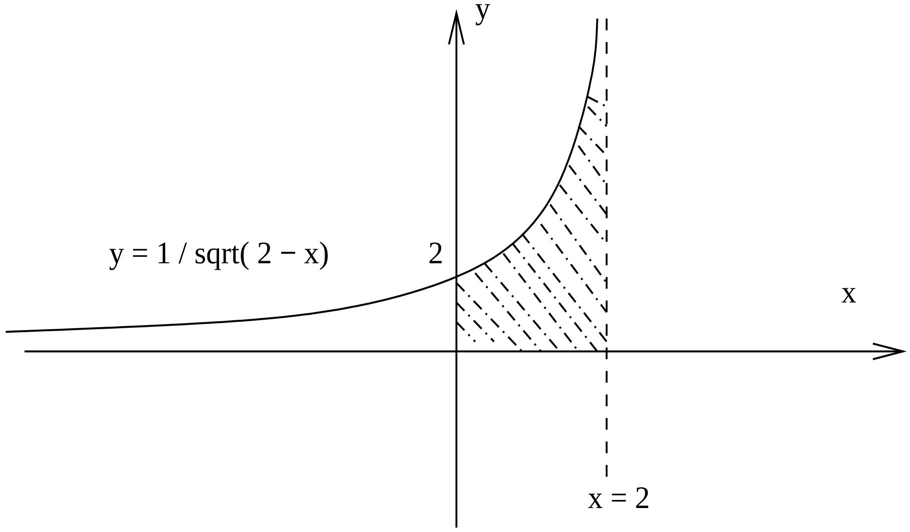
Solução :

(a) SIM. O denominador do integrando é zero quando $x = 2$; ou, de outra forma, a função não é contínua em $x = 2$.

(b) Temos

$$A = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{b\to 2^-} \int_0^b (2-x)^{1/2} dx = \lim_{b\to 2^-} \left[\frac{(2-x)^{1/2}}{-1/2}\right]_0^b$$
$$= \lim_{b\to 2^-} \left[-2\sqrt{2-b} \; + 2\sqrt{2}\right] = 2\sqrt{2}$$

vide esboço abaixo:



Questão 5. (2.0 pontos)

(1) Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{t^2-9}{t^2+4}dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule a derivada de F.

(2) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\int_2^x e^{t^2}dt}{x^2-4}$ usando a regra de L'Hopital.

Solução :

(1)

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{x^3} \frac{t^2-9}{t^2+4}dt\right] = \frac{(x^2)^2-9}{(x^2)^2+4}(2x)$$
$$= 2x\frac{x^4-9}{x^4+4} = \frac{2x^5-18x}{x^4+4}$$

(2) Observamos que numerador e denominador tendem a zero ao $x \to 2$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\int_2^x e^{t^2}dt}{x^2-4} \underset{\text{LH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{d}{dx}\left[\int_2^x e^{t^2}dt\right]}{\frac{d}{dx}\left[x^2-4\right]} = \lim_{x\to 2} \frac{e^{x^2}(1)}{2x} = \frac{e^4}{4}$$