Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A
Solução da Segunda Verificação : Fila D - 2003/2

Questão 1. (1.5 pontos) Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(5x)}{3x^2-4x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(10x^2+3x-4\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}$

Solução :

(a) Temos uma indeterminação do tipo 0/0, aplicando a Regra de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(5x)}{3x^2-4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}}{6x-4}=\lim_{x\to 0}\frac{5/1}{0-4}=\frac{-5}{4}$$

(b) Temos um indeterminação do tipo ∞/∞. Seja

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(10x^2+3x-4\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

Então

$$\ln(L)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(10x^2+3x-4\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left(10x^2+3x-4\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)$$

pois $ln(x)$ é contínua em seu domínio. Assim,

$$\ln(L)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(10x^2+3x-4\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(10x^2+3x-4\right)}{\ln(x)}$$

Indeterminação $\infty/\infty\Rightarrow$ Regra de L'Hopital:

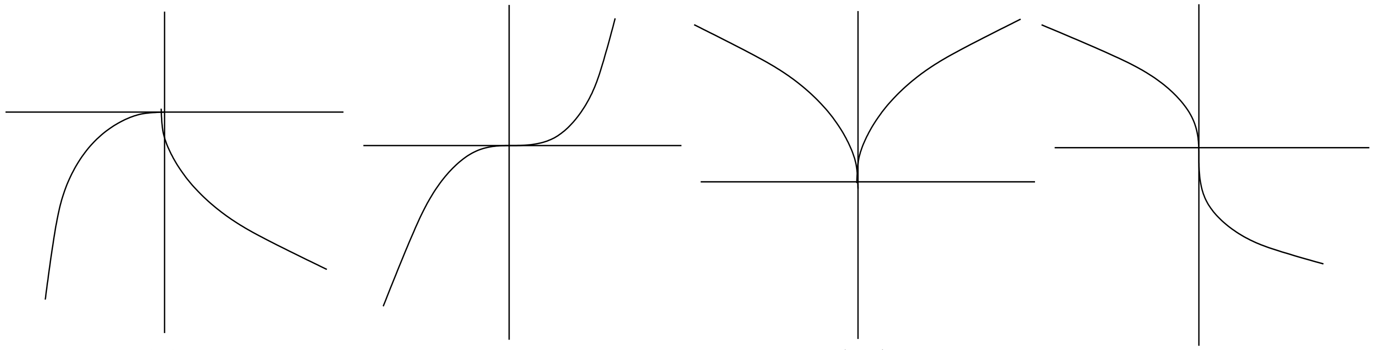
$$\ln(L)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{20x+3}{10x^2+3x-4}}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(20x+3)}{10x^2+3x-4}$$

$$\ln(L)=\lim_{x\to+\infty}\frac{20x^2}{10x^2}=2$$

e assim

$$\lim_{x\to+\infty}\left(10x^2+3x-4\right)^{\frac{1}{\ln(x)}}=L=e^2.$$

Questão 2. (1.0 ponto) Cada figura abaixo mostra o gráfico de uma função f. Em cada caso, verifique se $(0,0)$ é ou não ponto de inflexão do gráfico de f. Justifique suas respostas.



(I) (II) (III) (IV)

Solução :

(I) O gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$. O gráfico de f é côncavo para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Então $(0, 0)$ é ponto de inflexão .

(II) O gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$. O gráfico de f é côncavo para cima no intervalo $(0, +\infty)$. Então $(0, 0)$ é ponto de inflexão .

(III) O gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$. O gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(0, +\infty)$. O ponto $(0, 0)$ então não é ponto de inflexão .

(IV) O gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$. O gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(0, +\infty)$. Então $(0, 0)$ é ponto de inflexão .

Questão 3. (2.5 pontos) Seja f a função dada por $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2+3}$.

(a) Determine os intervalos de crescimento e os intervalos de decrescimento de f, bem como os seus extremos relativos (locais).

(b) Verifique a existência de assíntotas verticais e horizontais do gráfico de f; em caso afirmativo, escreva a(s) equação (ões) da(s) assíntota(s).

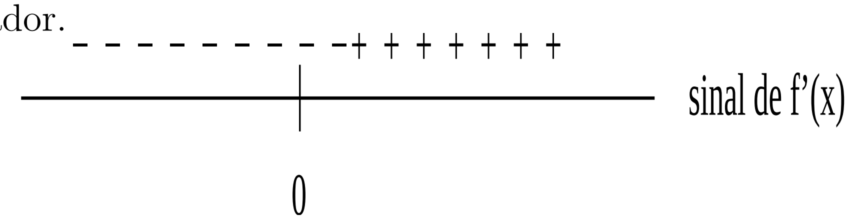
(c) Esboce o gráfico de f sabendo que $f''(x) > 0$ em $(-1, 1)$ e $f''(x) < 0$ em $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$. Indique, no gráfico obtido, todos extremos relativos, todos os pontos de inflexão e todas as assíntotas.

Solução :

(a)

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)(10x) - 5x^2(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{30x}{(x^2+3)^2}$$

como o denominador é sempre positivo, não se anula. $x = 0$ é o único valor que anula o numerador.



Assim

- $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$;
- $f(x)$ é crescente no intervalo $[0, +\infty)$;
- pelo Teste da Derivada Primeira, $x = 0$ é então ponto de mínimo relativo.

(b) Teste no $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2}{x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5 \text{ assim } y = 5 \text{ é assíntota horizontal no } -\infty.$$

Teste no $+\infty$:

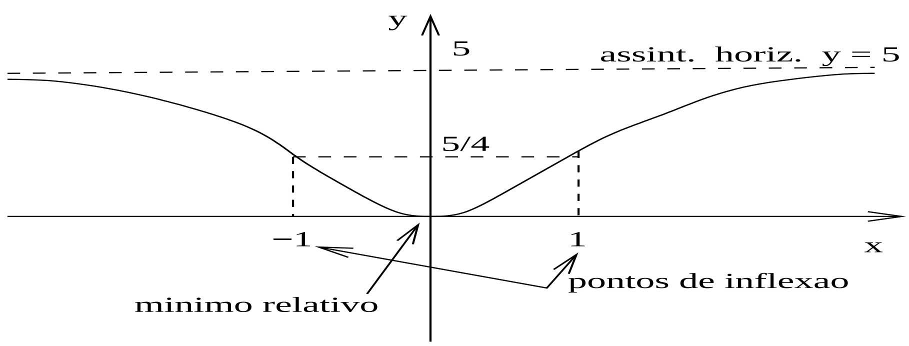
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5 \text{ assim } y = 5 \text{ é assíntota horizontal no } +\infty.$$

Assintotas verticais: não existem pois $f(x)$ é uma função racional cujo denominador não se anula, e portanto é uma função contínua em $(-\infty, +\infty)$.

Obs.: outra maneira de justificar a inexistência de assíntotas verticais é usando a informação sobre a derivada $f'(x)$: $f'(x)$ está sempre bem definida, ou seja $D(f') = (-\infty, +\infty)$.

(c)

$$f(0) = \frac{5(0)}{0+3} = 0 \ , \ f(\pm 1) = \frac{5(1)}{1+3} = \frac{5}{4}$$



Questão 4. (1.5 pontos) Um triângulo isósceles situado acima do eixo x tem um de seus vértices na origem, base paralela ao eixo x, e demais vértices na parábola $y = 16 - x^2$. Calcule a área do maior triangulo nessas condições .

Solução :

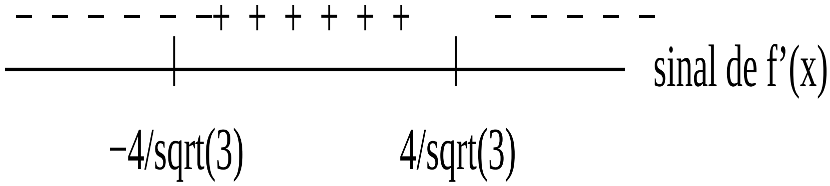
Área do triângulo = base x altura /2 :

$$A(x) = \frac{(2x)y}{2} = \frac{2x(16 - x^2)}{2} = x(16 - x^2)$$

para $0 < x < 4$.

$$A'(x) = (1)(16 - x^2) + x(-2x) = 16 - 3x^2$$

Pontos críticos $16 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16/3 \Rightarrow x = 4/\sqrt{3}$.



e pelo teste da derivada primeira (TDP) $x = 4/\sqrt{3}$ é um ponto de máximo local. Como esse ponto é o único extremo relativo em $(0, 4)$, $x = 4/\sqrt{3}$ também é ponto de máximo absoluto em $(0, 4)$.

Respondendo à pergunta: a maior área é

$$A\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{4(2)(16)}{3\sqrt{3}} = \frac{128\sqrt{3}}{9}.$$

unidades de área.

Questão 5. (1.5 pontos) Dada a função $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{5}$.

(a) Determine os extremos absolutos de f em $(0, +\infty)$, caso existam.

(b) Use o item (a) para mostrar que $x > \dfrac{\ln(x)}{5}$, para todo $x > 0$.

Solução :

(a)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x - \frac{\ln(x)}{5} = +\infty$$

pois $\ln(x) \to -\infty$. Então , não existem máximos absolutos em $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{5x} \;, x > 0$$
$$f''(x) = \frac{1}{5x^2} \;,\; x > 0$$

Existe apenas um ponto crítico em $(0, +\infty)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = 1/5$.

Como $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in (0, +\infty)$, temos $f''(1/5) > 0$ e assim $x = 1/5$ é um ponto de mínimo relativo pelo Teste da Derivada Segunda. Como esse é o único extremo relativo em $(0, +\infty)$, segue que $x = 1/5$ é também ponto de mínimo absoluto em $(0, +\infty)$.

(b) Pelo resultado da parte (a) $f(x) \geq f(1/5)$ para todo x no intervalo $(0, +\infty)$. Entretanto

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{\ln(1/5)}{5} = \frac{1}{5} + \frac{\ln(5)}{5} > 0$$

e assim

$$f(x) \geq f(1/5) > 0 \Rightarrow x - \frac{\ln(x)}{5} > 0 \Rightarrow x > \frac{\ln(x)}{5}$$

para todo $x > 0$.

Questão 6. (2.0 pontos) Determine:

(a) $\displaystyle\int xe^{kx}dx$, onde k é uma constante;

(b) $\displaystyle\int \frac{t}{3t^2+6}dt$

Solução :

(a) se $k = 0$

$$\int xe^{kx}dx = \int x(1)dx = \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

se $k \neq 0$: integração por partes

$$\begin{aligned} u = x \quad & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^{kx}dx \quad & \Rightarrow \quad v = \frac{e^{kx}}{k} \end{aligned}$$

implica

$$\int xe^{kx}dx = \frac{xe^{kx}}{k} - \int \frac{e^{kx}dx}{k} = \frac{xe^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k^2} + C, C \in \mathbb{R}$$

(b) substituição $u = 3t^2 + 6 \Rightarrow du/dt = 6t \Rightarrow du = 6t\ dt$

$$\int \frac{tdt}{3t^2+6} = \int \frac{du/6}{u} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = \frac{\ln|u|}{6} + C = \frac{\ln|3t^2+6|}{6} + C, C \in \mathbb{R}$$