

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A
Solução do Exame Geral - 2003/2

Questão 1. (2.0 pontos) Calcule

(a) Determine a equação da reta tangente à curva de equação $x \cos(\pi y) + 2y - 1 = 0$ no ponto $(1, 1)$.

(b) Determine, se existir, um valor positivo para $a \in \mathbb{R}$ que torna a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq a \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{2}, & x > a \end{cases}$$

contínua em $x = a$. Justifique sua resposta.

Solução :

(a) Equação da curva: $x \cos(\pi y) + 2y - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x \cos(\pi y) + 2y - 1) &= 0 \\ (1) \cos(\pi y) + x\pi(-\operatorname{sen}(\pi y)) \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} &= \cos(\pi y) + (2 - \pi x \operatorname{sen}(\pi y)) \frac{dy}{dx} = 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-\cos(\pi y)}{2 - \pi x \operatorname{sen}(\pi y)} = \frac{\cos(\pi y)}{\pi x \operatorname{sen}(\pi y) - 2}. \end{aligned}$$

No ponto $(1, 1)$, a quantidade acima nos dá o coeficiente angular da reta tangente:

$$m = \frac{\cos(\pi)}{\pi \operatorname{sen}(\pi) - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

e a equação da reta tangente é

$$(y - 1) = \frac{1}{2}(x - 1).$$

(b) Limites laterais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} x + 1 = a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{a} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

a função será contínua se esses valores forem iguais a $f(a) = a + 1$.

$$\frac{3}{a} + \frac{1}{2} = a + 1 \Rightarrow \frac{6 + a}{2a} = a + 1 \Rightarrow 6 + a = 2a^2 + 2a \Rightarrow 2a^2 + a - 6 = 0$$

e assim

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

e o valor positivo de a é igual a $3/2$.

Questão 2. (1.5 pontos) Calcule DUAS das três integrais abaixo. Indique claramente quais deverão ser corrigidas.

- (a) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$
 (b) $\int \frac{9 dx}{x(x^2-9)}$
 (c) $\int 2x \cos(x) dx$

Solução :

(a) Substituição trigonométrica: evitando zero no denominador,

$$\begin{aligned} x &= \text{sen}(u), & -\pi/2 < u < \pi/2 & \Rightarrow dx = \cos(u) du \\ x &= 0, & \mapsto \text{sen}(u) = 0 & \mapsto u = 0 \\ x &= \sqrt{2}/2, & \mapsto \text{sen}(u) = \sqrt{2}/2 & \mapsto u = \pi/4 \end{aligned}$$

onde

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\text{sen}^2(u)} = \sqrt{\cos^2(u)} = |\cos(u)| = \cos(u) \text{ em } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

e assim

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\pi/4} \frac{\text{sen}^2(u) \cos(u) du}{\cos(u)} = \int_0^{\pi/4} \text{sen}^2(u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos(2u)) du = \frac{1}{2} \left[u - \frac{\text{sen}(2u)}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi-2}{8} \end{aligned}$$

(b) Decomposição por Frações Parciais:

$$\begin{aligned} \frac{9}{x(x^2-9)} &= \frac{9}{x(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3} \\ \frac{9}{x(x^2-9)} &= \frac{A(x^2-9) + Bx(x+3) + Cx(x-3)}{x(x^2-9)} \\ 9 &= (A+B+C)x^2 + (3B-3C)x - 9A \text{ para todo } x \end{aligned}$$

e temos

$$\begin{cases} -9A = 9 & \Rightarrow A = -1 \\ 3B - 3C = 0 & \Rightarrow B = C \\ A + B + C = 0 & \Rightarrow B + C = 2B = -A = 1 \Rightarrow B = C = 1/2 \end{cases}$$

assim

$$\frac{9}{x(x^2 - 9)} = \frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x - 3} + \frac{1/2}{x + 3}$$

$$\int \frac{9dx}{x(x^2 - 9)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x - 3} + \frac{1/2}{x + 3} \right) dx = -\ln|x| + \frac{\ln|x - 3|}{2} + \frac{\ln|x + 3|}{2} + C$$

onde C é qualquer número real.

(c) Integração por Partes:

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2dx$$

$$dv = \cos(x)dx \quad \Rightarrow \quad v = \text{sen}(x)$$

e assim

$$\int 2x \cos(x)dx = 2x\text{sen}(x) - \int 2\text{sen}(x)dx = 2x\text{sen}(x) - 2(-\cos(x)) + C$$

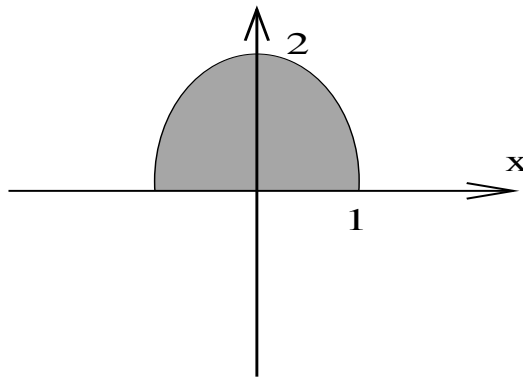
$$\Rightarrow \int 2x \cos(x)dx = 2x\text{sen}(x) + 2\cos(x) + C$$

onde C é qualquer número real.

Questão 3. (1.5 pontos)

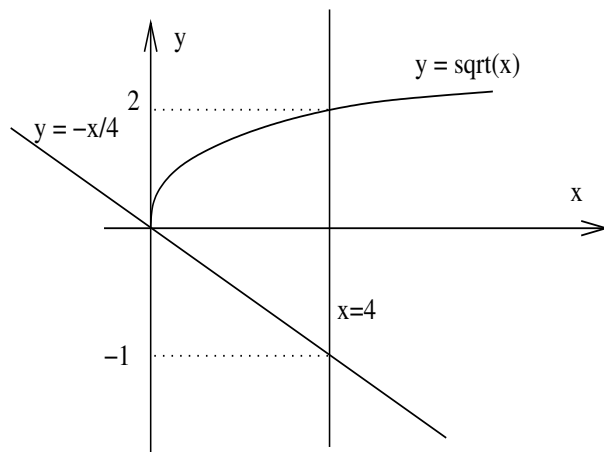
(a) Determine a área da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $x = 4$ e $y = -x/4$.

(b) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo X da região que está hachurada no gráfico da elipse ao lado (abaixo).



Solução :

(a)



$$A = \int_0^4 \left(x^{1/2} - \left(\frac{-x}{4} \right) \right) dx = \int_0^4 \left(x^{1/2} + \frac{x}{4} \right) dx$$

$$A = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{8} \right]_0^4$$

$$A = \frac{2(4)\sqrt{4}}{3} + \frac{(4)^2}{8} = \frac{16}{3} + \frac{16}{8} = \frac{16+6}{3} = \frac{22}{3}$$

(b) Equação da elipse:

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$y^2 = 4 - 4x^2 = 4(1 - x^2) \Rightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{1 - x^2} & \text{parte de cima} \\ y = -2\sqrt{1 - x^2} & \text{parte de baixo} \end{cases}$$

Assim

$$V = \int_{-1}^1 \pi y^2 dx = \int_{-1}^1 \pi 4(1 - x^2) dx = 4\pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 =$$

$$= 4\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) - 4\pi \left(-1 - \frac{-1}{3} \right) = 4\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}$$

unidades de volume.

Questão 4. (1.5 pontos) Esboce o gráfico de uma função contínua $y = f(x)$ que satisfaça TODAS as condições abaixo:

1. $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$,
2. $f'(-1) = 0 = f'(1)$,
3. $f'(x) > 0$ se $x \in (-1, 1)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,
4. $f''(x) > 0$ se $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ e $f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$,

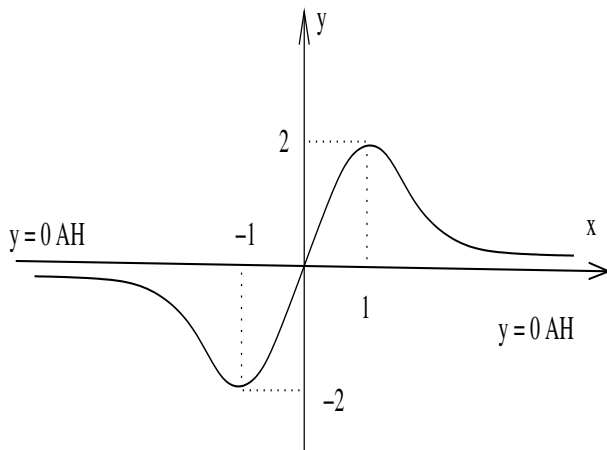
5. $f(-x) = -f(x)$,

6. $y = 0$ é a sua assíntota horizontal.

Solução :

$f(x)$ é crescente em $(-1, 1)$; $f(x)$ é decrescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f(x)$ é côncava para cima em $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$; $f(x)$ é côncava para baixo em $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.



Questão 5. (1.5 pontos) Resolva DUAS das três questões abaixo. Indique claramente quais deverão ser corrigidas.

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$

(b) Calcule $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

(c) Calcule $\frac{dF}{dx}(x)$, onde $F(x) = \int_0^{x^3} \frac{t-1}{t+1} dt$.

Solução :

(a) Temos uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} (1/x)}{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \stackrel{0/0}{\underset{\text{LH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(1/x)(-1x^{-2})}{-1x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(1/x) = \cos(0) = 1$$

(b) Integral Imprópria.

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_1^L \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

substituição :

$$\begin{aligned}
 u &= \sqrt{x}, du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\
 x = 1 &\mapsto u = \sqrt{x} \\
 x = L &\mapsto u = \sqrt{L} \\
 \int_1^L \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^{\sqrt{L}} e^{-u}(2du) = 2 [-e^{-u}]_1^{\sqrt{L}} = 2(e^{-1} - e^{-\sqrt{L}})
 \end{aligned}$$

assim

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} = 2(e^{-1} - e^{-\sqrt{L}}) = \frac{2}{e}$$

(c) Teorema Fundamental do Calculo + Regra da Cadeia

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{t-1}{t+1} dt = \frac{x^3-1}{x^3+1} (3x^2) = \frac{3x^2(x^3-1)}{x^3+1}$$

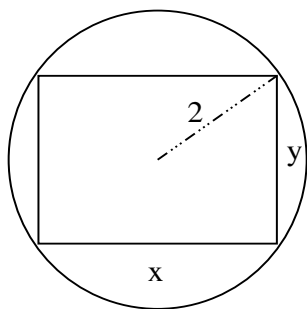
Questão 6.(2.0 pontos)

(a) Determine a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um círculo de área 4π . Justifique sua resposta, mostrando que realmente temos um máximo absoluto no intervalo apropriado.

(b) Uma prancha de 10m está apoiada em uma parede. Se, em um certo instante, a sua base está afastada 6 metros da parede e a base está sendo empurrada em direção à parede a uma taxa de $2m/s$, qual é a taxa de variação instantânea do ângulo agudo que a prancha faz com o solo neste instante ? (Deixe a resposta em rad/s) O ângulo está crescendo ou decrescendo nesse instante ?

Solução :

(a) Restrição : $x^2 + y^2 = (4)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$



Maximizar: $A = xy$

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2} \implies A = A(x) = x\sqrt{16 - x^2}$$

definida para $0 \leq x \leq 4$ (lado do retângulo não pode exceder sua diagonal).

Procuramos por máximo absoluto no intervalo fechado $[0, 4]$.

$$A'(x) = \frac{d}{dx} [x(16 - x^2)^{1/2}] = (1)(16 - x^2)^{1/2} + x(1/2)(16 - x^2)^{-1/2}(-2x) =$$

$$= \sqrt{16 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{(\sqrt{16 - x^2})^2 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - x^2 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Pontos críticos:

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 16 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8} = \sqrt{2(4)} = 2\sqrt{2}$$

$$A'(x) \text{ não existe: } x = \pm 4$$

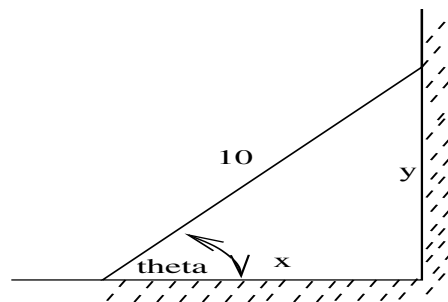
Pontos críticos em $[0, 4]$: $x = 2\sqrt{2}$ e $x = 4$.

Comparando $A(0)$, $A(2\sqrt{2})$ e $A(4)$ temos

x	$A(x)$
0	$0\sqrt{16 - 0^2} = 0$
$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}\sqrt{16 - 8} = \sqrt{8}\sqrt{8} = 8$
4	$4\sqrt{16 - 4^2} = 0$

e então $x = 2\sqrt{2}$ é o ponto de máximo absoluto em $[0, 4]$. A área do maior retângulo é então $A(2\sqrt{2}) = 8$.

(b)



Dados: num certo instante, quando $x = 6$, $dx/dt = -2m/s$.

Determinar: $d\theta/dt$ neste instante.

$$\cos(\theta) = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{d}{dt}[\cos(\theta)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{x}{10} \right] \Rightarrow -\text{sen}(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dx}{dt}$$

onde

$$x = 6 \Rightarrow y = \sqrt{(10)^2 - x^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

e então , neste instante,

$$-\frac{4}{5} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}(-2) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{5(2)}{4(10)} = \frac{1}{4}$$

A taxa de variação pedida é de $1/4 \text{ rad/s}$ (radianos por segundo). O ângulo θ está crescendo neste instante.