

Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A
Solução da Terceira Verificação : Fila C - 2003/1

Questão 1. (2.0 pontos) Calcule

(a) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$ (b) $\int \frac{2x^2+9}{x^2(x-3)} dx$

Solução :

(a) Substituição trigonométrica:

$$x = 2\text{sen}(u) \Rightarrow dx = 2 \cos(u) du$$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\text{sen}^2(u)} = 2\sqrt{\cos^2(u)} = 2|\cos(u)| = 2 \cos(u)$$

onde $u \in [-\pi/2, \pi/2]$.

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{2 \cos(u)(2) \cos(u) du}{4\text{sen}^2(u)} = \int \cotg^2(u) du = \int (\text{cosec}^2(u) - 1) du$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = -\cotg(u) - u + C = -\frac{\cos(u)}{\text{sen}(u)} - u + C =$$

$$-\frac{\sqrt{1-(x/2)^2}}{x/2} - \arcsen(x/2) + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsen(x/2) + C, C \in \mathbb{R}$$

(b) Integração por frações parciais:

$$\frac{2x^2+9}{x^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} = \frac{Ax(x-3) + B(x-3) + Cx^2}{x^2(x-3)}$$

implica $2x^2+9 = (A+C)x^2 + (B-3A)x - 3B$ para todo x , e assim

$$\begin{cases} A+C=2 \\ B-3A=0 \\ -3B=9 \end{cases} \Rightarrow B=-3$$

$\Rightarrow A = B/3 = -1 \Rightarrow C = 2 - A = 2 + 1 = 3$ e assim

$$\frac{2x^2+9}{x^2(x-3)} = \frac{-1}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{3}{x-3}$$

implica

$$\int \frac{2x^2+9}{x^2(x-3)} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{3}{x-3} \right) dx = -\ln|x| + \frac{3}{x} + 3 \ln|x-3| + C$$

onde $C \in \mathbb{R}$.

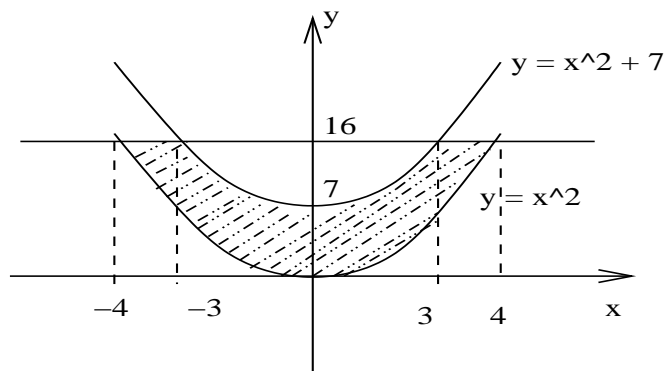
Questão 2. (2.0 pontos) Dadas as curvas $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 7$ e a reta $y = 16$,

(a) faça um esboço da região **R** entre as curvas e abaixo da reta dada identificando claramente todos os pontos de intersecção ;

(b) calcule a área da região **R**.

Solução :

(a) intersecção : f e reta: $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$. g e reta: $x^2 + 7 = 16 \Rightarrow x = \pm 3$.



(b)

$$A = 2 \int_3^4 (16 - x^2) dx + 2 \int_0^3 (x^2 + 7 - x^2) dx = 2 \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_3^4 + 2(7)(3 - 0)$$

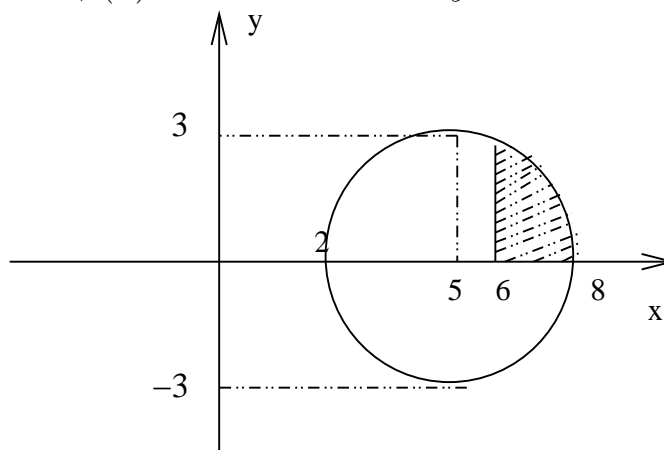
$$A = 2 \left(16(4) - \frac{4^3}{3} - 16(3) + \frac{3^3}{3} \right) + 42 = 2(16) - \frac{128}{3} + \frac{54}{3} + 42 =$$

$$\frac{96 - 128 + 54 + 126}{3} = \frac{148}{3}$$

Questão 3. (2.0 pontos)

Seja **R** a região hachurada no círculo ao lado (abaixo). Escreva (**não calcule**) a integral que calcula o volume do sólido obtido quando rodamos a região **R**:

(a) em torno do eixo x ; (b) em torno do eixo y .



Solução :

Equação da circunferência : $(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$ ou seja $(x - 5)^2 + y^2 = 9$.

(a) em torno do eixo x

$$V = \int_6^8 \pi y^2 dx = \pi \int_6^8 (9 - (x - 5)^2) dx$$

(b) em torno do eixo y : primeiro, $x = 6 \Rightarrow (6 - 5)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$ e então

$$V = \int_0^{2\sqrt{2}} \pi(x^2 - 6^2)dy = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left[(5 + \sqrt{9 - y^2})^2 - 36 \right] dy$$

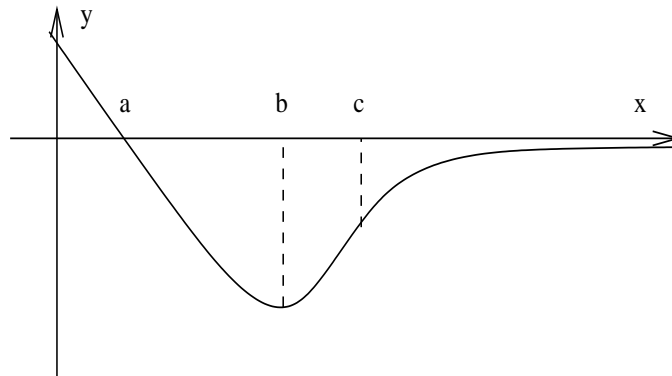
Questão 4. (2.0 pontos) O gráfico de uma função f , definida em $[0, +\infty)$, é dado ao lado (abaixo). Seja F a antiderivada de f definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

(a) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento de F . Justifique sua resposta.

(b) Calcule a integral imprópria $\int_0^{+\infty} (5 - 2t)e^{5t-t^2} dt$.

(c) Determine a assíntota horizontal de F quando $f(t) = (5 - 2t)e^{5t-t^2}$.



Solução :

(a) Pelo TFC, parte 2,

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$$

e então

- $F'(x) = f(x) > 0$ no intervalo $(0, a) \Rightarrow F(x)$ é crescente nesse intervalo;
- $F'(x) = f(x) < 0$ no intervalo $(a, +\infty) \Rightarrow F(x)$ é decrescente nesse intervalo;

(b) Primeiramente, por se tratar de uma integral imprópria,

$$\int_0^{+\infty} (5 - 2t)e^{5t-t^2} dt = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_0^L (5 - 2t)e^{5t-t^2} dt$$

e fazendo a substituição $u = 5t - t^2$, $du = (5 - 2t)dt$ implica

$$t = 0 \leftrightarrow u = 5(0) - (0)^2 = 0$$

$$t = L \leftrightarrow u = 5L - L^2$$

$$\int_0^L (5 - 2t)e^{5t-t^2} dt = \int_0^{5L-L^2} e^u du = [e^u]_0^{5L-L^2} = e^{5L-L^2} - 1$$

e assim

$$\int_0^{+\infty} (5 - 2t)e^{5t-t^2} dt = \lim_{L \rightarrow +\infty} e^{5L-L^2} - 1 = \lim_{L \rightarrow +\infty} e^{-L^2} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

(c) como o domínio de F é o intervalo $(0, +\infty)$, testamos no $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} (5 - 2t)e^{5t-t^2} dt = -1$$

e pela parte (b). Assim, a reta $y = -1$ é assíntota horizontal do gráfico de $F(x)$ no $+\infty$.

Questão 5. (2.0 pontos) Considere a cônica de equação $x^2 + 10x - 16y^2 + 9 = 0$.

(a) Determine a sua equação canônica, seus elementos principais (focos, vértices) e classifique-a.

(b) Determine o coeficiente angular da reta tangente no(s) ponto(s) onde a curva intercepta o eixo y .

Solução :

(a) Completamento de quadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 16y^2 + 9 &= 0 \\ x^2 + 10x + (10/2)^2 - 16y^2 &= -9 + (10/2)^2 = 16 \\ (x + 5)^2 - 16y^2 &= 16 \Leftrightarrow (x + 5)^2 - 16y^2 = 16 \\ \frac{(x + 5)^2}{16} - \frac{y^2}{1} &= 1 \Leftrightarrow \frac{(x + 5)^2}{4^2} - \frac{y^2}{1} = 1 \end{aligned}$$

e temos centro em $C(-5, 0)$, eixo real paralelo ao eixo x . Temos $a = 4$, $b = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 16 \Rightarrow c = \sqrt{17}$.

Focos: $F_1(-5 - \sqrt{17}, 0)$ e $F_2(-5 + \sqrt{17}, 0)$.

Vértices: $V_1(-5 - 4, 0)$ e $V_2(-5 + 4, 0)$, isto é $V_1(-9, 0)$, $V_2(-1, 0)$.

Essa cônica é uma hipérbole.

(b) Pontos onde intercepta:

$$x = 0 \Rightarrow -16y^2 + 9 = 0 \Rightarrow y^2 = 9/16 \Rightarrow y = \pm 3/4$$

Derivação implícita:

$$2x + 10 - 2(16)y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 10}{32y} = \frac{x + 5}{16y}$$

em $(0, -3/4)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0 + 5}{16(-3/4)} = \frac{-5}{12}$ e o coeficiente angular é $m = -5/12$.

em $(0, 3/4)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0 + 5}{16(3/4)} = \frac{5}{12}$ e o coeficiente angular é $m = 5/12$.