Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A
Solução do Exame Geral - 2003/1

Questão 1. (1.0 ponto) Calcule

(a) $\dfrac{dy}{dx}$, sendo $y = e^{x^3+x^2} \cdot \cos(2x)$.

(b) $\dfrac{dy}{dx}$, sendo $x^2 - y^2 = 2x\ln(y)$.

Solução : (a)

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^3+x^2}(3x^2+2x)\cos(2x) + e^{x^3+x^2}(-\text{sen}\,(2x))(2)$$
$$\frac{dy}{dx} = ((3x^2+2x)\cos(2x) - 2\text{sen}\,(2x))e^{x^3+x^2}.$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\left(x^2-y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(2x\ln(y)\right)$$
$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = (2)\ln(y) + 2x\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x-2\ln(y)}{2x/y+2y} = \frac{x-\ln(y)}{x/y+y}$$

ou ainda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y\ln(y)}{x+y^2}.$$

Questão 2. (1.5 pontos) Calcule as três integrais abaixo:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

(b) $\displaystyle\int \frac{-x^2+3x+16}{x(x-4)^2}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

Solução :

(A) Substituição : $x = 3\text{sen}\,(u) \quad dx = 3\cos(u)du$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos(u)du}{(3\text{sen}\,(u))^2\sqrt{9-9\text{sen}^2(u)}} = \int \frac{3\cos(u)du}{9\text{sen}^2(u)(3)\cos(u)}$$
$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{du}{9\text{sen}^2(u)} = \frac{1}{9}\int \csc^2(u)du = \frac{-\cot(u)}{9} + C$$

onde

$$\text{sen}\,(u) = x/3 \Rightarrow \cos(u) = \sqrt{1-(x/3)^2} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$
$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{\sqrt{9-x^2}/3}{9x/3} + C = \frac{-\sqrt{9-x^2}}{9x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

(B) Decomposição em Frações Parciais

$$\frac{-x^2+3x+16}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2} = \frac{A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx}{x(x-4)^2}$$

$$-x^2+3x+16 = A(x^2-8x+16) + B(x^2-4x) + Cx$$

$$-x^2+3x+16 = (A+B)x^2 + (C-8A-4B)x + 16A$$

para todo x, e temos

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ C-8A-4B=3 \\ 16A=16, \qquad\qquad \Rightarrow A=1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow B = -1 - A = -2, C = 3 + 8A + 4B = 3 + 8(1) + 4(-2) = 3.$

$$\int \frac{-x^2+3x+16}{x(x-4)^2}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-2}{x-4} + \frac{3}{(x-4)^2}\right) dx =$$

$$\ln|x| - 3\ln|x-4| - \frac{2}{x-4} + C, C \in \mathbb{R}.$$

(C) Integração por Partes:

$$\begin{aligned} u = \ln(x) \quad &\longrightarrow \quad du = \tfrac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad &\longrightarrow \quad v = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

e assim

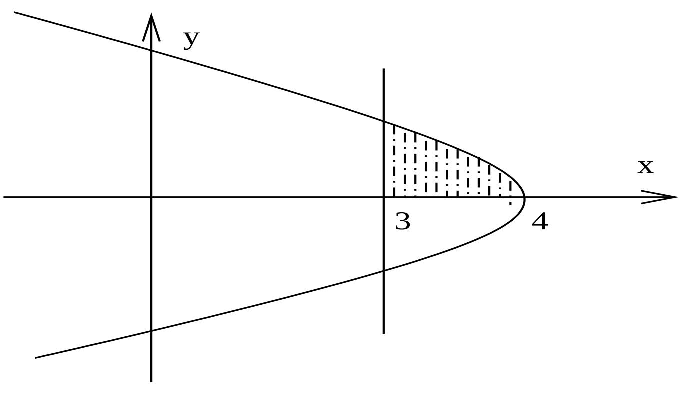
$$\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln(x) - \int 2\sqrt{x}\frac{dx}{x} = 2\sqrt{x}\ln(x) - 2\int x^{-1/2}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln(x) - 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x}\ln(x) - 4\sqrt{x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Questão 3. (2.0 pontos) Seja R a região hachurada ao lado (abaixo), limitada pelo gráfico de $x = 4 - y^2$ e $x = 3$.

(a) Calcule a área de R.

(b) Escreva (**não calcule**) a integral quqe expressa o volume do sólido obtido quando rodamos a região R em torno do eixo y.



Solução : (a) Intersecção : $4 - y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$$A = \int_0^1 (x-3)dy = \int_0^1 ((4-y^2)-3)dy = \int_0^1 (1-y^2)dy = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(b)

$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - 3^2)dy = \int_0^1 \pi\left((4-y^2)^2 - 9\right)dy = \int_0^1 \pi(y^4 - 8y^2 + 7)dy$$

Questão 4. (2.0 pontos)

(a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-2}$ no ponto de abscissa 1.

(b) Considere a cônica de equação $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$. Determine sua equação canônica, seus elementos principais (focos, vértices,...) e classifique-a.

Solução (a)

$$f(1) = \frac{1+3}{1-2} = -4$$
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-2) - (x^2+3)(2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{-10x}{(x^2-2)^2}$$

e então

$$f'(1) = \frac{-10(1)}{(1-2)^2} = -10$$

e a equação é $y - (-4) = -10(x-1)$ ou seja, $y + 4 = -10(x-1)$.

(b)

$$9x^2 - 36x + 4y^2 - 8y = -4$$
$$9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$$
$$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -4 + 36 + 4 = 36$$
$$\frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y-1)^2}{36} = 1$$
$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

e temos uma elipse: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 9 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Eixo principal é paralelo ao eixo dos Y. Centro tem coordenadas $C(2,1)$.

Focos $F_1(2, 1-\sqrt{5})$ e $F_2(2, 1+\sqrt{5})$.

Vértices $V_1(2, 1-3) = V_1(2,-2)$ e $V_2(2, 1+3) = V_2(2,4)$

Excentricidade $e = c/a = \sqrt{5}\,/3$.

Questão 5. (1.5 pontos)

Uma área retangular com $216m^2$ será cercada e dividida em duas partes iguais por uma cerca paralela a um de seus lados. Quais as dimensões do retângulo externo que exigirão a menor quantidade total de cerca ? Quantos metros de cerca serão necessários ?

Solução :

x e y são as dimensões , cerca divisória tem dimensão x. $A = 216m^2$ área do retângulo externo. Q é a quantidade de cerca (em metros).

$$xy = 216m^2 \Rightarrow y = 216/x$$
$$Q = 2y + 3x = 2(216/x) + 3x$$

e temos que minimizar a quantidade

$$Q(x) = 3x + \frac{2(216)}{x}, x > 0$$

Temos

$$Q'(x) = 3 - \frac{2(216)}{x^2}$$

e o único ponto crítico em $(0, +\infty)$ satisfaz $Q'(x) = 0$, isto é,

$$3 = \frac{2(216)}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{2(216)}{3} = 144 \Rightarrow x = 12.$$

Além disso,

$$Q''(x) = \frac{4(216)}{x^3}$$

que é contínua e positiva em $(0, +\infty)$. Portanto $x = 12$ é um ponto de mínimo relativo. Como $x = 12$ é o único ponto crítico de $Q(x)$ em $(0, +\infty)$, segue que $x = 12$ é também um ponto de mínimo absoluto em $(0, +\infty)$.

As dimensões que exigirão a menor quantidade de cerca são $x = 12m$ e $y = 216/12 = 18m$.

Serão necessários $3(12) + 2(18) = 72$ metros de cerca.

Questão 6. (2.0 pontos) Dada a função $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$, determine:

(a) o domínio de f,

(b) os intervalos de crescimento e os de decrescimento de f,

(c) os pontos de máximo ou mínimo local de f, caso existam,

(d) as assíntotas horizontais e as verticais, caso existam.

Solução :

(a) $D(f) = (0, +\infty)$ pois x dever ser positivo por causa do logaritmo e não -nulo porque x^2 é denominador.

(b)

$$f'(x) = \frac{x^2(1/x) - \ln(x)(2x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

e como x^3 é sempre positivo em $(0, +\infty)$:

f é crescente: $1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1/2 \Leftrightarrow 0 < x < e^{1/2} = \sqrt{e}$

f é decrescente: $1 - 2\ln(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1/2 \Leftrightarrow x > e^{1/2} = \sqrt{e}$

Assim f é crescente em $(0, \sqrt{e})$ e decrescente em $(\sqrt{e}, +\infty)$.

(c) Pelo teste da derivada primeira e a pela parte (b), $x = \sqrt{e}$ é ponto de máximo local de f.

(d) Assintotas verticiais: como a função $f(x)$ é contínua em sem domínio, assintotas podem ocorrer em $x = 0$ ou ao $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$$

pois $x^2 \to +0$ e $\ln(x) \to -\infty$. Então existe assintota vertical em $x = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$$

e como temos uma indeterminação do tipo ∞/∞:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

e assim a reta $y = 0$ é assíntota horizontal no $+\infty$.