Mat01353 - Cálculo e Geometria Analítica I-A
Solução do Exame Geral - Fila A - 2002/2

Questão 1. (2.5 pontos).

(a) Calcular (I) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)dx}{\sqrt{x}}$, , (II) $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(\sqrt{x^2+3\pi^2}\right)$, no ponto de abscissa $x = \pi$.

Solução :

(I) Integração por Partes:

$$\begin{array}{ll} u = \ln(x) & \longrightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} & \longrightarrow v = 2\sqrt{x} \end{array}$$

Dessa forma,

$$\int \frac{\ln(x)dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln(x) - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{dx}{x} = 2\sqrt{x}\ln(x) - 2\int x^{-1/2}dx$$
$$\int \frac{\ln(x)dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln(x) - 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x}\ln(x) - 4\sqrt{x} + C$$

(II) Decomposição em Frações Parciais:

$$\frac{3x^2+4x+2}{x(x^2+2x+1)} = \frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

ou seja

$$\frac{3x^2+4x+2}{x(x^2+2x+1)} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$$
$$\Rightarrow 3x^2+4x+2 \equiv A(x^2+2x+1) + B(x^2+x) + Cx$$
$$\Rightarrow 3x^2+4x+2 \equiv (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

e temos que resolver

$$\left\{\begin{array}{cl} A+B & = 3 \\ 2A+B+C & = 4 \\ A & = 2 \end{array}\right. .$$

Temos

$$A = 2 \Rightarrow B = 3 - A = 3 - 2 = 1$$
$$\rightarrow C = 4 - 2A - B = 4 - 4 - 1 = -1$$

ou seja

$$\frac{3x^2+4x+2}{x(x^2+2x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

o que implica

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{x(x^2+2x+1)}dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}\right) dx$$

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{x(x^2+2x+1)}dx = 2\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{x(x^2+2x+1)}dx = 2\ln|x| + \ln|x+1| + \frac{1}{(x+1)} + C$$

onde C é qualquer constante real.

(b) Temos, pela Regra da Cadeia,

$$f'(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+3\pi^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+3\pi^2}} \cdot (2x)$$

e então

$$f'(\pi) = \cos\left(\sqrt{(\pi)^2+3\pi^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{(\pi)^2+3\pi^2}} \cdot (2\pi)$$

$$f'(\pi) = \cos(2\pi) \cdot \frac{1}{2(2\pi)} \cdot (2\pi) = \frac{1}{2}.$$

Assim

$$\begin{gathered} y - f(\pi) = f'(\pi)(x-\pi) \\ \Rightarrow y - \text{sen}\left(\sqrt{(\pi)^2+3\pi^2}\right) = \tfrac{1}{2}(x-\pi) \\ \Rightarrow y - \text{sen}\ (2\pi) = \tfrac{1}{2}(x-\pi) \\ \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x-\pi) \end{gathered}$$

é a equação procurada.

Questão 2. (2.5 pontos)

(a) Uma caixa de base quadrada, sem tampa, deve ter $12m^2$ de superfície total. Determine o comprimento da aresta da base e a altura da caixa de volume máximo.

(b) Gás escapa de um balão esférico à razão de $4m^2/h$. Determine a taxa de variação do raio quando sua medida é de 1m, indicando a unidade apropriada.

Solução :

Seja x o comprimenta da aresta da base e h a altura da caixa.

$$x^2 + 4xh = 12 \Longrightarrow h = \frac{12-x^2}{4x}$$

$$V = x^2h \Longrightarrow V(x) = x^2 \cdot \frac{12-x^2}{4x} = 3x - x^3/4$$

é a função a ser minimizada em $(0, \sqrt{12})$, pois $12 - x^2$ deve ser positivo.

$$V'(x) = 3 - 3x^2/4$$

Pontos estacionários: $x^2/4 = 1 \Rightarrow x = 2$ (x deve ser positivo)

Pontos de não -diferenciabilidade: não existem pois $V'(x)$ é contínua.

Além disso

$$V''(x) = -3x/2 < 0$$

para todo x no intervalo $(0, \sqrt{12})$. Dessa forma $V(x)$ possui um máximo absoluto nesse intervalo quando $x = 2$, e então $h = 12/2^2 = 3$.

A caixa de volume máximo tem aresta de $2m$ e altura $3m$.

(b) Sejam r o raio, $V(r)$ o volume. Usando

$$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \, \frac{dr}{dt}$$

e quando $r = 1$ temos

$$4 = 4\pi (1)^2 \, \frac{dr}{dt} \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}$$

e então a taxa de variação do raio é de $1/\pi \; m/h$ no instante em que $r = 1m$.

Questão 3. (2.5 pontos)

(a) Esboçe o gráfico de uma função contínua que verifica, simultaneamente, todas as condições abaixo:

(I) $f(2) = 2$ e $f(4) = 3$; (II) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

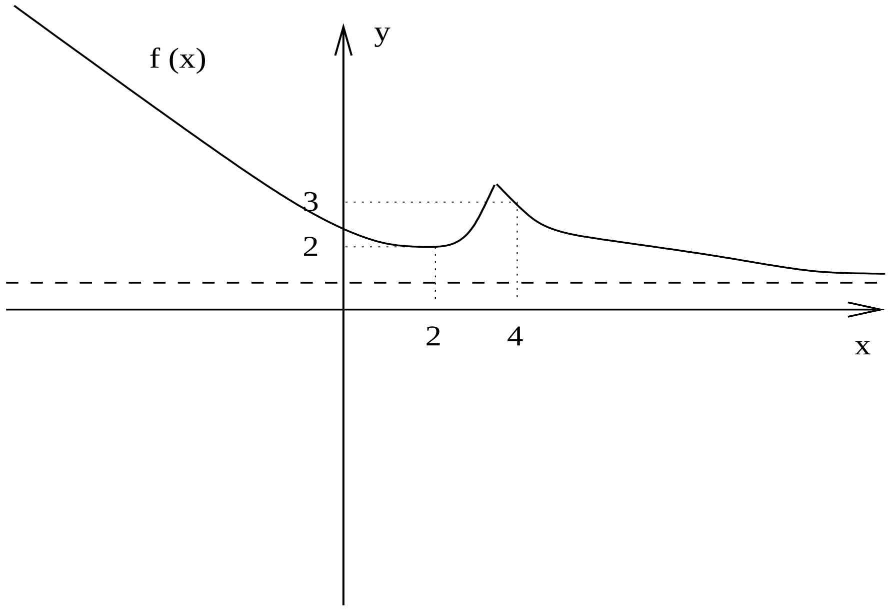
(III) $f'(x) < 0$ para $x < 2$ e $x > 4$; (IV) $f''(x) > 0$ para todo x.

(b) Dado que $f(x) = x^2 e^{2x}$, determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f, bem como seus pontos de máximo e de mínimo relativo, caso existam. Determine também a equação das assíntotas do gráfico de f.

Solução :

(a) Temos que pelo (II) a reta $y = 1$ deve ser assíntota horizontal 'a direita; pelo (III) a função é decrescente em $(-\infty, 2)$ e $(4, +\infty)$. Pelo (IV) o gráfico é sempre côncavo para cima.

É possível traçar o gráfico de uma função contínua com derivada descontínua satisfazendo as restrições acima:



(b) Temos

$$f'(x) = 2xe^{2x} + x^2(2)e^{2x} = 2x(1+x)e^{2x}$$

e como e^{2x} é sempre positivo, o sinal da derivada é determinado pelo sinal da parábola (voltada para cima) $y = x(1+x)$. A expressão se anula em $x = -1$ e $x = 0$ e é negativa entre esses valores, e sendo positiva caso contrário. Ou seja,

$f'(x) < 0$ em $(-1, 0) \Longrightarrow f(x)$ é descrescente em $[-1, 0]$.

$f'(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(0, +\infty) \Longrightarrow f(x)$ é crescente em $(-\infty, -1] \bigcup [0, +\infty)$.

Máximo relativo em $x = -1$ pois o sinal da derivada troca de positivo para negativo (TDP).

Mínimo relativo em $x = 0$ pois o sinal da derivada troca de negativo para positivo (TDP).

A função é contínua e definida em toda a reta, e não existem assíntotas verticais.

Procurando por assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{2x} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-2x}}$$

e aplicando a Regra de L'Hopital

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-2e^{-2x}} \overset{LH}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{4e^{-2x}} = 0$$

e então a reta $y = 0$ é assíntota horizontal (à esquerda).

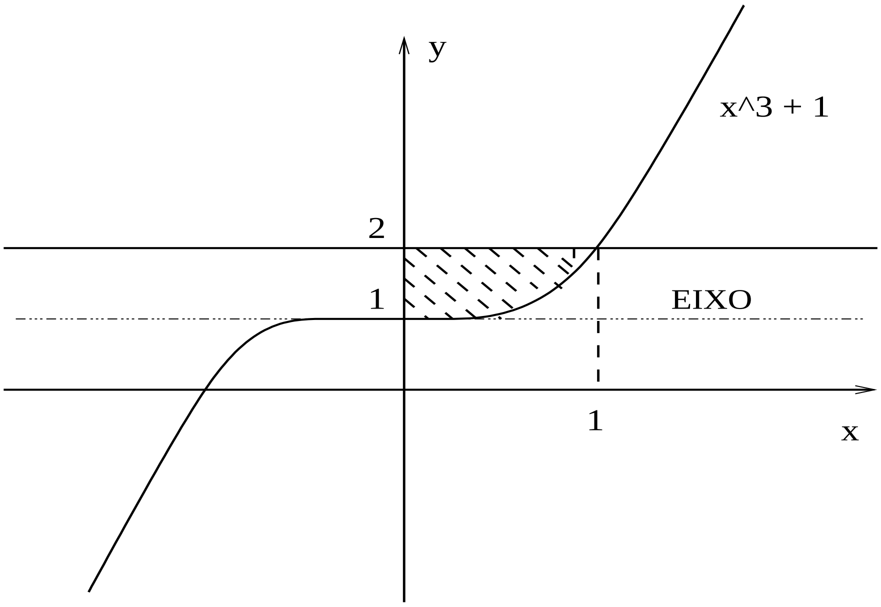
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2e^{2x} \overset{\infty\cdot\infty}{=} +\infty$$

e não existe assíntota ao $x \to +\infty$.

Questão 4. (1.5 pontos)

Calcule o volume do sólido obtido ao girarmos a região limitada pelos gráficos de $y = x^3 + 1$, $y = 2$ e o eixo y, ao redor da reta $y = 1$.

Solução :



Temos, pelo Método das Arruelas,

$$V = \pi \int_0^1 (2^2 - (x^3+1)^2)dx = 4\pi(1-0) - \pi \int_0^1 (x^3+1)^2 dx$$

e assim

$$V = 4\pi - \pi \int_0^1 (x^6 + 2x^3 + 1)dx = 4\pi - \pi \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^4}{4} + x \right]_0^1 =$$
$$4\pi - \pi \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + 1 \right) = 4\pi - \frac{2 - 7 + 14}{14}\pi = \frac{(56-9)\pi}{14} = \frac{47\pi}{14}.$$

Questão 5. (1.0 pontos)

Considere a cônica definida pela equação $y^2 + 4y - 10x + 34 = 0$.

Classifique-a e determine seus elementos principais. Faça um esboço da mesma.

Solução :

$$y^2 + 4y + 4 = 10x - 34 + 4 \Longrightarrow (y+2)^2 = 10(x-3)$$

e temos uma parábola do tipo $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

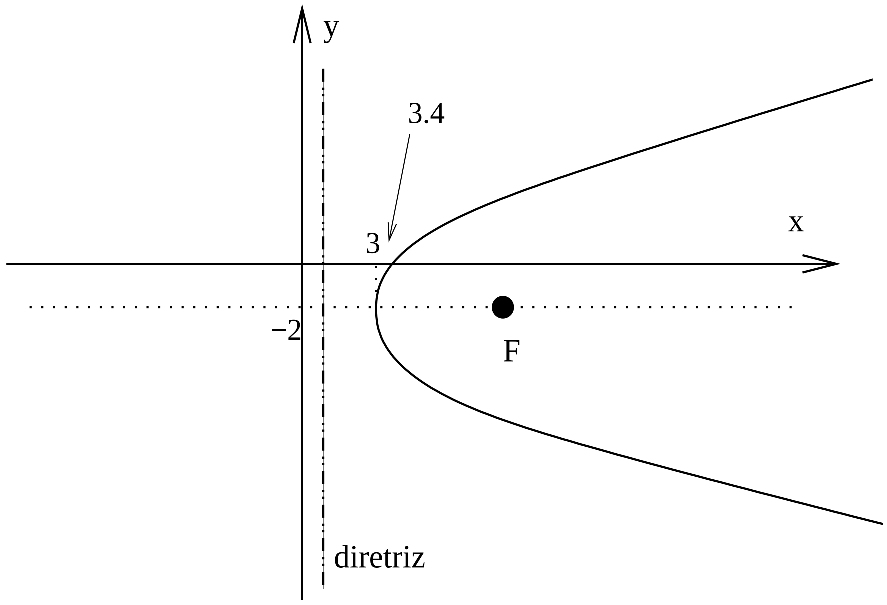
Assim

$$k = -2, h = 3, 4p = 10 \Longrightarrow p = 10/4 = 5/2.$$

e o eixo principal é paralelo ao eixo dos X.

Vértice $V(3, -2)$, foco $F(3 + 5/2, -2) = F(11/2, -2)$.

Diretriz é a reta $x = 3 - 5/2$, ie, $x = 1/2$.


y
3.4
x
3
−2
F
diretriz