UFRGS – Instituto de Matemática
DMPA - Depto. de Matemática Pura e Aplicada
MAT 01 353 – Cálculo e Geometria Analítica I A
Gabarito da 2ª PROVA fila A – 5 de novembro de 2005

Questão 1 (1,5 pontos) Verifique se a função f dada abaixo é contínua em $x = 0$. **Justifique a resposta.**

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x^7\right), & x \leqslant 0 \\ \dfrac{\text{tg }(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

<u>**Solução:**</u>

Para determinar a continuidade de f em $x = 0$, devemos calcular os limites laterais $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, pois a função f tem expressões diferentes para números negativos e positivos, e verificar se estes são iguais e coincidem com $f(0)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2\sqrt{2}\cdot\cos\big(\frac{\pi}{4} - x^7\big) = 2\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to 0^-}\cos\big(\frac{\pi}{4} - x^7\big) = 2\sqrt{2}\cdot\cos\big(\frac{\pi}{4}\big) = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{tg}\big(2\sqrt{x}\big)}{\sqrt{x}}$ que é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Então, aplicamos a Regra de L'Hospital e obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2\big(2\sqrt{x}\big)\cdot 2\dfrac{d}{dx}\big(\sqrt{x}\big)}{\dfrac{d}{dx}\big(\sqrt{x}\big)} = 2\cdot\lim_{x\to 0^+}\sec^2(2\sqrt{x}) = 2\cdot\sec^2\Big(\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big) = 2\cdot 1 = 2.$$

Logo $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$. Para que f seja contínua em $x = 0$, devemos ter $f(0) = 2$. De fato,

$f(0) = 2\sqrt{2}\cdot\cos\big(\frac{\pi}{4} - 0\big) = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2.$ Conseqüentemente, f é contínua em $x = 0$.

Questão 2 (3 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{e^2}{4}\, x\,(\ln x)^2$. Sabe-se que:

$$f'(x) = \frac{e^2}{4}\,(\ln x)^2 + \frac{e^2}{2}\,\ln x \qquad f' > 0 \text{ em } (0,\, e^{-2}) \cup (1, +\infty) \qquad f' < 0 \text{ em } (e^{-2}, 1)$$

a) Determine o domínio de f e as intersecções com os eixos coordenados.

b) Verifique se existem assíntotas verticais e horizontais e, em caso afirmativo, escreva as equações.

c) Determine os extremos relativos de f, classificando-os.

d) Determine os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima, intervalos onde é côncavo para baixo e os pontos de inflexão.

e) Faça um esboço completo do gráfico de $\boldsymbol{f}$.

Justifique as respostas e use que $\boxed{e \approx 2,7}$

Solução:

a) $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$.

Intersecção com eixo x: O ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f está no eixo x se, e somente se, $f(x) = 0$, ou seja, $\dfrac{e^2}{4}\, x\,(\ln x)^2 = 0$, o que ocorre apenas quando $\ln(x) = 0$, isto é, quando $x = 1$.

Intersecção com eixo y: Os pontos do gráfico de f possuem abscissa estritamente positiva. Logo, nenhum ponto do gráfico de f pode estar no eixo y. Portanto, a intersecção com o eixo y é vazia.

b) Assíntotas horizontais: Como $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$, basta calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^2}{4}\, x\,(\ln x)^2 = +\infty, \quad \text{pois} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^2}{4}\, x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty.$$

Portanto, não existem assíntotas horizontais.

Assíntotas verticais: Como f é contínua em todo seu domínio, ali não ocorrem assíntotas verticais. Devemos analisar se a reta vertical $x = 0$ é assíntota. Para tanto, calculamos $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^2}{4}\, x\,(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^2}{4}\,(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}$, que é uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Então, aplicamos a

Regra de L'Hospital e obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^2}{4}\, x\,(\ln\, x)^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^2}{4}\, 2\ln(x)\frac{1}{x}}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = -\frac{e^2}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)},$$

e novamente chegamos a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos outra vez a Regra de L'Hospital e obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^2}{4}\, x\,(\ln\, x)^2 = -\frac{e^2}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \frac{e^2}{2} \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Conseqüentemente, $x = 0$ não é uma assíntota vertical.

c) Extremos relativos: É dado no enunciado da questão que

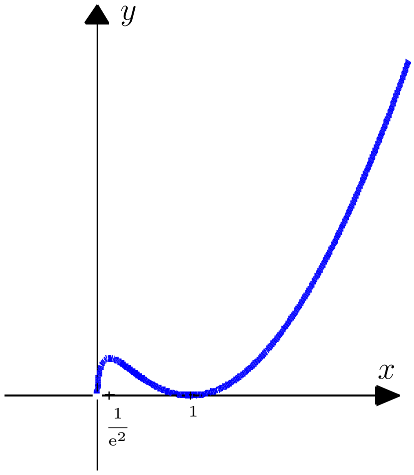
$$f'(x) = \frac{e^2}{4}\,(\ln x)^2 + \frac{e^2}{2}\,\ln x \quad \Rightarrow \quad f' > 0 \text{ em } (0,\, e^{-2}) \cup (1, +\infty) \quad \text{e} \quad f' < 0 \text{ em } (e^{-2}, 1).$$

Como a função f' é contínua em $(0, +\infty)$, os pontos críticos são apenas aqueles que anulam a derivada, o que ocorre em $x = e^{-2}$ e $x = 1$. Com as informações sobre o sinal de f' concluímos que f é crescente em $(0,\, e^{-2})$ e em $(1, +\infty)$ e decrescente em $(e^{-2}, 1)$. Portanto, $x = e^{-2}$ é ponto de máximo local e $x = 1$ é ponto de mínimo local.

d) Concavidade de f e pontos de inflexão: Para a determinação de concavidades e inflexões devemos estudar o sinal de f''. Como $f''(x) = \frac{e^2}{4}\, 2\ln(x)\,\frac{1}{x} + \frac{e^2}{2}\,\frac{1}{x} = \frac{e^2}{2x}\,\big(\ln(x) + 1\big)$ temos que $f'' = 0$ se, e somente se $\ln(x) = -1$, ou seja, $x = \frac{1}{e}$. Da continuidade de f'' segue que não há troca de sinal de f'' nos intervalos $\big(0, \frac{1}{e}\big)$ e $\big(\frac{1}{e}, +\infty\big)$. Testando um ponto em cada um destes intervalos, determinamos o sinal de f'' em cada intervalo:

- $f''\Big(\frac{1}{e^2}\Big) = \frac{e^2}{2e^{-2}}\,\big(\ln(e^{-2}) + 1\big) = \frac{e^4}{2}\,(-2+1) = -\frac{e^4}{2} < 0$ logo, $f''(x) < 0$ para todo $x \in \big(0, \frac{1}{e}\big)$ e portanto o gráfico de f é côncavo para baixo em $\big(0, \frac{1}{e}\big)$.
- $f''(1) = \frac{e^2}{2\cdot 1}\big(\ln 1 + 1\big) = \frac{e^2}{2} > 0$ logo, $f''(x) > 0$ para todo $x \in \big(\frac{1}{e}, +\infty\big)$ e portanto o gráfico de f é côncavo para cima em $\big(\frac{1}{e}, +\infty\big)$.

e) Gráfico de f:



Questão 3 (1,5 pontos) Determine um ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ sobre o gráfico de

$$f(x) = e^{\,4/x}$$

de forma que a reta tangente ao gráfico de f em P_0 também passe pelo ponto $(-1, 0)$.

Solução:

A declividade da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$m = f'(x_0) = \frac{d}{dx}(e^{4/x})|_{x=x_0} = e^{4/x_0}(-4/x_0^2).$$

Como a reta passa pelos pontos $(-1, 0)$ e $(x_0, f(x_0)) = (x_0, e^{4/x_0})$, obtemos que

$$m = \frac{e^{4/x_0} - 0}{x_0 + 1}. \quad \text{Portanto,} \quad \frac{e^{4/x_0}}{x_0 + 1} = e^{4/x_0}(-4/x_0^2).$$

Cancelando e^{4/x_0} obtemos $\dfrac{1}{x_0 + 1} = \dfrac{-4}{x_0^2}$, isto é, $x_0^2 = -4(x_0 + 1)$,

ou seja, $x_0^2 + 4x_0 + 4 = 0$. Logo $(x_0 + 2)^2 = 0$. Assim, $x_0 = -2$ e $y_0 = e^{4/-2} = e^{-2}$. Conseqüentemente o ponto pedido é $(-2, e^{-2})$.

Questão 4 (2,5 pontos)

a) Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{1+x^4}}$

b) Determine o valor máximo absoluto da função $f(\theta) = -\cos(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)$

no intervalo $\mathrm{I} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

<u>**Solução:**</u>

a) Fazendo $u = 1 + x^4$ temos que $du = 4x^3dx$ e portanto:

$$\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}du$$

$$= \frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1+x^4} + C$$

b) Sendo f uma função contínua e I um intervalo fechado, f assume máximo e mínimo absolutos no intervalo I. Temos:

$$f'(\theta) = -\left(-\operatorname{sen}(\theta)\right) - 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)\left(1 - 2\cos(\theta)\right)$$

e portanto $f'(\theta) = 0$ quando

- $\operatorname{sen}(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$ pois $\theta \in \mathrm{I} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- $1 - 2\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ e $\theta = -\frac{\pi}{3}$ pois $\theta \in \mathrm{I} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Como f' está definida para todos os valores de I, os candidatos a extremos absolutos são os pontos críticos ($x = 0$, $x = \pi/3$ e $x = -\pi/3$) e os extremos de I ($x = -\pi/2$, e $x = \pi/2$). Testando tais pontos em f obtemos:

$$f(0) = -1 - 0 = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{5}{4} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0 - (1)^2 = -1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{5}{4} \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -0 - (-1)^2 = -1$$

Logo, o <u>valor máximo absoluto de f</u> no intervalo I é -1.

Questão 5 (1,5 pontos) Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de 600 cm^3. O material usado para confeccionar a tampa e a base da caixa custa 3 reais por cm^2 e o material usado nas laterais custa 5 reais por cm^2. Determine as dimensões da caixa de menor custo.

<u>**Solução:**</u>

Consideramos:

x: aresta da base(base quadrada)

y: aresta lateral

V: volume da caixa

C: custo de fabricação da caixa

Queremos minimizar o custo de fabricação da caixa:

$$C = 3(2x^2) + 5(4xy),$$

com a restrição:

$$V = 600\text{cm}^3, \text{ou seja } x^2y = 600.$$

Desta forma podemos escrever o custo como função apenas de x:

$$C(x) = 6x^2 + 20x(\frac{600}{x^2}) = 6x^2 + \frac{12000}{x},$$

cujo domínio é $(0, +\infty)$.

Derivando a função custo obtemos:

$$\frac{dC}{dx} = 12x - \frac{12000}{x^2}.$$

Para encontrar os pontos críticos, resolvemos a equação $\frac{dC}{dx} = 0$:

$$\begin{aligned} 12x - \frac{12000}{x^2} &= 0 \\ 12x &= \frac{12000}{x^2} \\ x^3 &= 1000 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Temos que mostrar que o ponto crítico $x = 10$ é ponto de mínimo absoluto. Calculando:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} C(x) &= \lim_{x \to 0^+} (6x^2 + \frac{12000}{x}) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} C(x) &= \lim_{x \to +\infty} (6x^2 + \frac{12000}{x}) = +\infty \end{aligned}$$

concluímos que C tem mínimo absoluto; como $x = 10$ é o único ponto crítico, então é o ponto de mínimo.

Se $x = 10$, então $y = \frac{600}{10^2} = 6$.

Resposta: As dimensões da caixa de menor custo são: 10cm×10cm×6cm.