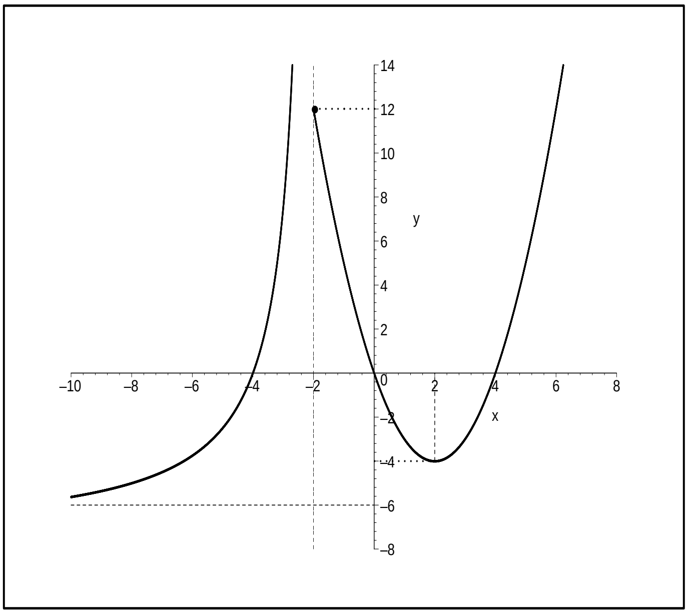
UFRGS – Instituto de Matemática
DMPA - Depto. de Matemática Pura e Aplicada
MAT 01 353 – Cálculo e Geometria Analítica I A

Gabarito da 1ª PROVA fila A – 24 de setembro de 2005

Questão 1 (1,5 pontos). Seja f uma função cujo gráfico é dado abaixo.

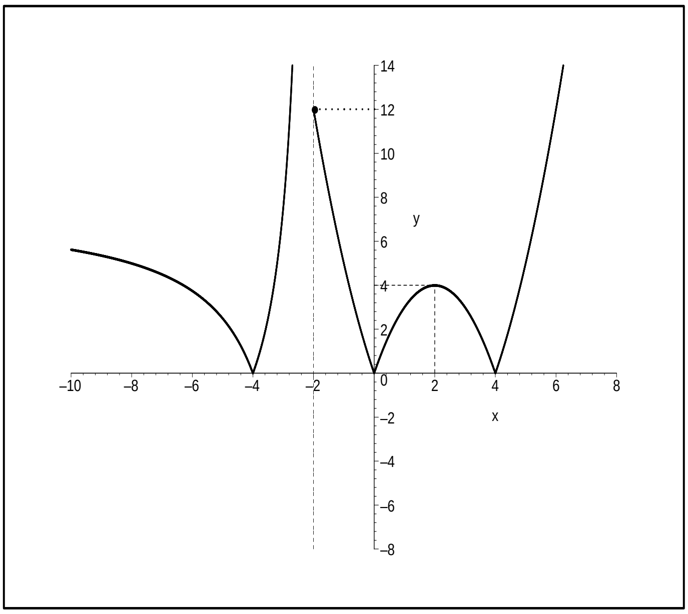
a) Faça o esboço do gráfico de $h(x) = \mid f(x) \mid$ no sistema de coordenadas dado abaixo. Indique as intersecções com os eixos x e y, bem como assíntotas.

b) Idem para $g(x) = f(2x)$.

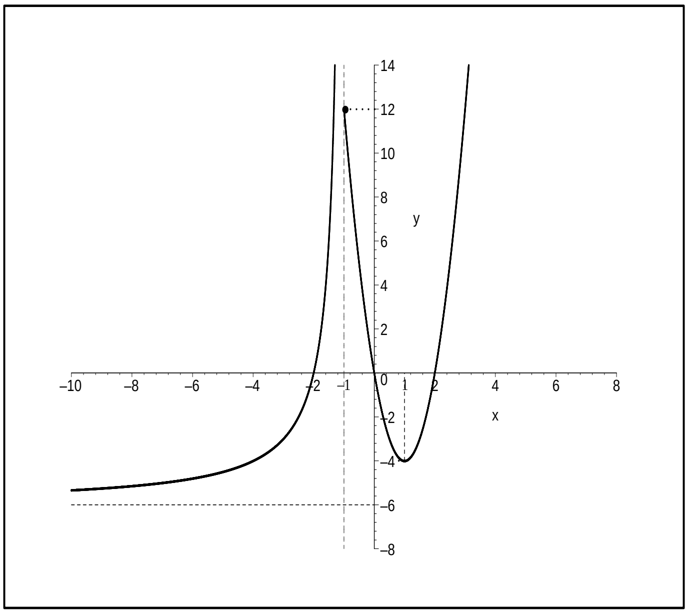


<u>**Solução:**</u>

a) $h(x) = \mid f(x) \mid$



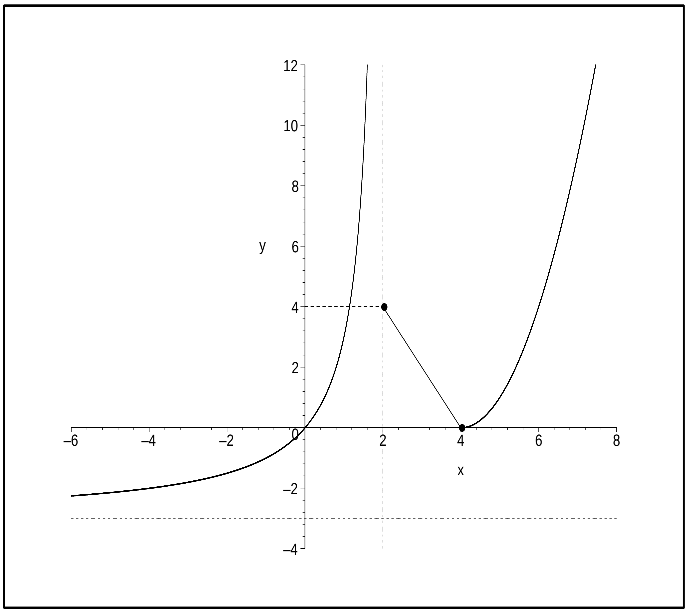
b) $g(x) = f(2x)$



Questão 2 (1,0 ponto). Seja f uma função cujo gráfico é dado abaixo.

a) f é contínua em $x = 2$? f é contínua em $x = 4$? **Justifique suas respostas**.

b) Dê os intervalos onde $f' \geq 0$.



<u>**Solução:**</u>

(a) • f é contínua em $x = 2$? **Não**, pois $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$. Logo, o limite bilateral $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ não existe.

• f é contínua em $x = 4$? **Sim**, pois $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$. Logo, $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0 = f(4)$.

(b) $f' \geq 0$ em $(-\infty, 2) \bigcup (4, \infty)$. Note que $f'(x)$ não existe em $x = 2$ (devido a descontinuidade) e em $x = 4$ (pois há um "bico" neste ponto)

Questão 3 (2,0 ponto). Seja f a função dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$.

a) determine Dom(f) e as intersecções com os eixos coordenados:

b) determine os intervalos onde o gráfico de f é crescente e os intervalos onde é decrescente, bem como os seus extremos relativos (locais):

c) Verifique a existência de assíntotas verticais e horizontais do gráfico de f; em caso afirmativo, escreva a(s) equação(ões) da(s) assíntota(s):

Solução: **a) • Domínio:** Observe que f é uma função racional e portanto, não está definida apenas onde o seu denominador se anula. Como o polinômio x^2+2 nunca se anula em $\mathbb{R}$, $\text{Dom}(\mathbf{f}) = \mathbb{R}$.

• Intersecção com o eixo x: $\quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

Logo, os pontos de intersecção com o eixo x são $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

• Intersecção com o eixo y: $\quad f(0) = \dfrac{0 - 4}{0 + 2} = \dfrac{-4}{2} = -2.$

Portanto, o ponto de intersecção com o eixo y é $(0, -2)$.

b) A função derivada de f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e é dada por

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + 2) - (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 2)^2} \ .$$

• intervalos de crescimento/decrescimento: Segue do cálculo acima que $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ e $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$, pois o denominador é sempre positivo para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Logo, como f é contínua em R, f é decrescente em $(-\infty, 0]$ e f é crescente em $[0, \infty)$

• extremos relativos: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Como $f'(x)$ existe para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o único ponto crítico de f ocorre para $x = 0$. Assim, f possui apenas um extremo relativo. Como $f'(x) < 0$

em $(-\infty, 0)$ e $f'(x) > 0$ em $(0, \infty)$, segue do teste da primeira derivada que f tem um mínimo relativo em $(0, -2)$.

c) • assíntotas verticais: O gráfico de f não possui assíntotas verticais, pois $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ $(\neq \pm\infty)$, uma vez que f é contínua em todo número ral a.

• assíntotas horizontais: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 1 = 1.$

Analogamente, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Conseqüentemente, a única assíntota horizontal do gráfico de f é a reta de equação $y = 1$.

Questão 4 (2,5 pontos).

a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$ em $x = 1$.

b) Determine os valores de a, b e c de modo que a função $f(x) = \dfrac{a}{x} + bx + c$ possua uma reta tangente horizontal em $x = 1$ e uma reta tangente dada por $y = 3x + 5$ em $x = 2$.

Solução: **a)** Primeiro calculamos a função f em $x = 1$:

$$f(1) = \sqrt{2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1} = \sqrt{9} = 3.$$

Então, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 3)$ tem a forma

$$y - 3 = f^{'}(1) \cdot (x - 1).$$

Logo, resta calcular $f^{'}(1)$. Pela regra da cadeia, temos

$$f^{'}(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x^2 + 7x}} \cdot (4x + 7).$$

Assim,

$$f^{'}(1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1}} \cdot (4 \cdot 1 + 7) = \frac{11}{6}.$$

Substituindo na equação da reta acima obtemos:

$$y - 3 = \frac{11}{6} \cdot (x - 1) = \frac{11}{6} \cdot x - \frac{11}{6},$$

ou seja,

$$y = \frac{11}{6} \cdot x - \frac{11}{6} + 3 = \frac{11}{6} \cdot x + \frac{7}{6} \quad .$$

Resposta final: $\boxed{y = \frac{11}{6} \cdot x + \frac{7}{6}}$

b) Como a reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é horizontal, temos que $f'(1) = 0$.

Como a reta $y = 3x + 5$ é a reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$, temos que $f'(2) = 3$.

Por outro lado, $f'(x) = \dfrac{-a}{x^2} + b$, e portanto,

$$0 = f'(1) = -a + b, \text{ ou seja, } a = b \quad \text{e} \quad 3 = f'(2) = \frac{-a}{4} + b.$$

Logo, $3 = \dfrac{-a}{4} + a = \dfrac{3a}{4}$, ou seja, $a = b = 4$.

Para calcular o valor de c, observamos que, em $x = 2$, o valor de f e da reta tangente são iguais.

Assim, $3 \cdot 2 + 5 = 11 = f(2) = \dfrac{4}{2} + 4 \cdot 2 + c = 2 + 8 + c = 10 + c$. Portanto, $c = 1$.

Resposta final: $\boxed{a = b = 4 \text{ e } c = 1}$

Questão 5 (2,0 pontos). Considere a cônica dada pela seguinte equação

$3x^2 - 4y^2 + 24y - 48 = 0.$ Determine:

a) o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da cônica acima no ponto $(4, 0)$

b) a sua equação canônica, indique seus vértices, focos, centro e faça um esboço de seu gráfico.

Solução: **a)** Derivando a equação da cônica implicitamente, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\big(3x^2 - 4y^2 + 24y - 48\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 8y \cdot \frac{dy}{dx} + 24 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ou seja, $$(24 - 8y) \cdot \frac{dy}{dx} = -6x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-6x}{24 - 8y}$$

Conseqüentemente, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da cônica acima no ponto $(4, 0)$

é dado por: $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4, y=0} = \frac{-6 \cdot 4}{24 - 8 \cdot 0} = \frac{-24}{24} = -1$$

b) • **Equação Canônica:** Completando quadrados na equação $3x^2 - 4y^2 + 24y - 48 = 0$, obtemos:

$$3x^2 - 4\big(y^2 - 6y\big) - 48 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 4\big(y^2 - 2 \cdot 3y + 9\big) - 48 = -36 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 4\big(y - 3\big)^2 = 12$$

Assim, a equação reduzida da cônica é $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\big(y-3\big)^2}{3} = 1$, e portanto a cônica é uma **hipérbole**

com eixo focal paralelo ao eixo x (eixo focal horizontal).

• **Centro:** Da equação reduzida, obtemos que o centro da cônica é $C = (0, 3)$

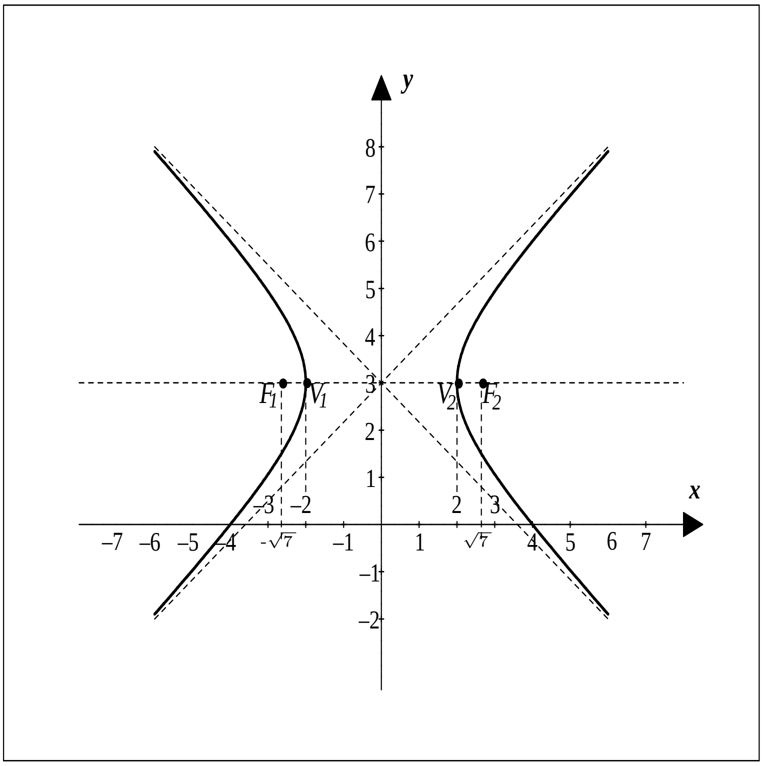
• **Vértices e Focos:** Da equação reduzida, segue que $a^2 = 4$ e $b^2 = 3$. Logo,

$$a = 2 \;\text{ e }\; b = \sqrt{3}. \quad \text{Portanto,} \quad c = \sqrt{7}. \quad \text{Então,}$$

os vértices são $\boxed{V_1 = (2, 3) \;\text{ e }\; V_2 = (-2, 3)}$ e

os focos são $\boxed{F_1 = (\sqrt{7}, 3) \;\text{ e }\; F_2 = (-\sqrt{7}, 3)}$.

• **Esboço do gráfico da hipérbole:**



Questão 6 (1,0 pontos). Areia cai de uma calha de escoamento formando um cone cuja altura é sempre igual ao diâmetro da base. Se a altura cresce a uma taxa constante de 5 pés/min, com que taxa a areia estará escoando quando a pilha for de 10 pés de altura?

Solução: Dados do problema:

- t: tempo (min)
- h: altura do cone (pés) pés
- r: raio da base do cone (pés)
- V: volume do cone (pés^3)
- h, r, V: funções de t
- $h = 2r$
- $\dfrac{dh}{dt} = 5$ pés/min

Precisamos calcular $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{h=10}$. Escrevendo o volume em função da altura encontramos:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{\pi h^3}{12}.$$

Derivando o volume em relação a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{5\pi h^2}{4}$$

Dessa forma:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=10} = \frac{5\pi}{4} \cdot 10^2 = 125\pi \ \text{pés}^3/\text{min}.$$