

## Seção 3: Equações Separáveis

**Definição.** Uma EDO de 1ª ordem é dita *separável* se for da forma

$$y' = f(x)g(y),$$

onde  $f(x)$  e  $g(y)$  são funções de uma variável. Ou seja, é o caso de equação em forma normal  $y' = F(x, y)$  em que  $F(x, y)$  é do tipo particular  $F(x, y) = f(x)g(y)$ .

**Exemplos: 1.** A equação  $y' = \frac{2x}{1+2y}$  é separável, com  $f(x) = 2x$  e  $g(y) = \frac{1}{1+2y}$ .

**2.** A equação  $y' = y + 3x$  não é separável.

**Método de Resolução.** As equações separáveis são aquelas em que se pode separar as variáveis, passando para um lado da igualdade os termos contendo  $y$  e  $dy$  e para o outro lado os termos contendo  $x$  e  $dx$ . Já resolvemos equações separáveis pelo método de separação de variáveis em vários exemplos das seções anteriores. Vamos apenas comentar que

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)g(y) \tag{1}$$

equivale a

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \text{ou} \quad g(y) = 0.$$

Se  $y_0$  é tal que  $g(y_0) = 0$ , é fácil verificar que a função constante  $y(x) = y_0$  é uma solução da EDO (1). As demais são obtidas por integração

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Admitindo que se consiga calcular as integrais acima, vamos obter a solução geral da EDO separável (1) na forma

$$\psi(y) = \varphi(x) + C, \tag{2}$$

onde  $\varphi(x)$  e  $\psi(y)$  são certas funções de uma variável. O que queremos observar aqui é a forma como vamos encontrar a solução geral (2). Dado um  $x$ , não está dito quanto vale o  $y$  correspondente. Só é dada uma equação relacionando  $x$  e  $y$ . Em resumo, *ao resolvermos uma equação separável pelo método de separação de variáveis, vamos encontrar a solução geral (2) definida implicitamente. Em alguns exemplos conseguimos resolver a equação (2), explicitando  $y$  como função de  $x$ . Em outros exemplos, isto pode ser muito difícil ou mesmo impossível. Pode ainda existir uma ou mais soluções não incluídas na solução geral. Estas serão da forma  $y = y_0$ , onde  $y_0$  um zero da função  $g(y)$ .*

**Exemplo 3.** Resolver a EDO

$$xy' + y - y^2 = 0. \tag{3}$$

Esta equação é separável,

$$x \frac{dy}{dx} = y^2 - y,$$

que é equivalente a

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x} \quad \text{ou} \quad y = 0 \quad \text{ou} \quad y = 1.$$

Verificamos que as funções constantes  $y = 0$  e  $y = 1$  são soluções da EDO (3). Ficamos com a integral

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Decompondo em frações parciais

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y},$$

obtemos

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + \ln C.$$

A solução geral em forma implícita é

$$\frac{|y-1|}{|y|} = C|x|, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{y-1}{y} = \pm Cx$$

ou ainda (permitindo que  $C$  assumam valores positivos e negativos), simplesmente,

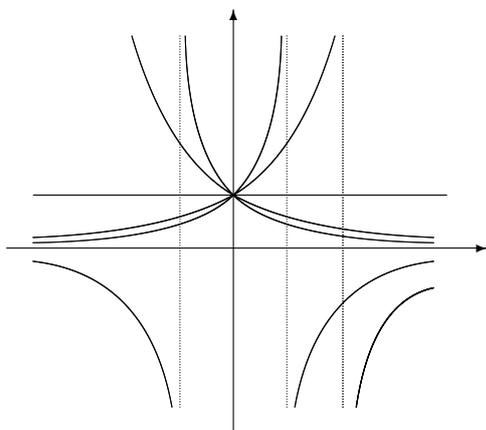
$$\frac{y-1}{y} = Cx.$$

Neste exemplo é simples obter  $y$  explicitamente, isolando

$$1 - \frac{1}{y} = Cx \quad , \quad 1 - Cx = \frac{1}{y} \quad , \quad y = \frac{1}{1 - Cx}.$$

Finalmente as soluções da EDO (3) são

$$y = \frac{1}{1 - Cx} \quad , \quad y = 0.$$



Note que aqui a solução particular  $y = 1$  fica incluída na solução geral, para  $C = 0$  e, por isto, não precisamos insistir nela. Mas a solução particular  $y = 0$  não está contida na solução geral para nenhum valor da constante  $C$ .

Ao lado está um esboço da família das soluções da EDO (3). Todas as curvas passam pelo ponto  $(0, 1)$ . As soluções preenchem o plano todo exceto os pontos  $(0, y)$  sobre o eixo dos  $Y$  com  $y \neq 0$ , pelos quais não passa nenhuma solução.

Isto só não contradiz o Teorema de Existência e Unicidade da Seção 2 porque, embora a EDO (3) faça sentido em todo o plano, ela só pode ser colocada em forma normal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - y}{x}$$

para  $x \neq 0$ , ou seja, fora do eixo  $Y$ .

**Exemplo 4.** Vamos formar problemas de valor inicial, acrescentando alguma condição inicial à mesma EDO considerada no Exemplo 3.

– Resolva o PVI abaixo, encontrando o intervalo máximo de definição da solução

$$\begin{cases} xy' + y - y^2 = 0 \\ y(-1) = 2 \end{cases} \quad (4)$$

Tomamos a solução geral encontrada acima substituímos  $x = -1$  e  $y = 2$ . Isto nos dá

$$2 = \frac{1}{1 + C}.$$

Obtemos  $C = -\frac{1}{2}$  e  $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x} = \frac{2}{x + 2}$ . Esta solução não está definida para  $x = -2$  e na EDO não tem nenhuma restrição adicional. Retirando do conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais o elemento  $x = -2$ , sobram 2 intervalos,  $(-\infty, -2)$  e  $(-2, +\infty)$ . Mas para cumprir a condição inicial, nossa solução precisa estar definida no ponto  $x = -1$ . Dentre os 2 intervalos, tomamos aquele que contém o ponto  $x = -1$ , ou seja  $(-2, +\infty)$ .

*Conclusão:* A solução do PVI (4) é a função  $y = \frac{2}{x + 2}$ , definida o intervalo  $I = (-2, +\infty)$ .

– Resolva o PVI abaixo, encontrando o intervalo máximo de definição da solução

$$\begin{cases} xy' + y - y^2 = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Se substituirmos na solução geral  $x = 2$  e  $y = 0$ , encontraremos uma condição impossível de ser cumprida. Isto se deve ao fato que a solução do PVI (5) não está incluída na solução geral da EDO, mas é precisamente a solução  $y(x) = 0$ . O intervalo de definição desta função é todo  $I = \mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.** Resolva o PVI abaixo, encontrando o intervalo máximo de definição da solução

$$\begin{cases} y' = \frac{2x}{1 + 2y} \\ y(2) = -1 \end{cases} \quad (6)$$

Denotando  $y'$  por  $\frac{dy}{dx}$ , separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + 2y}, \quad (1 + 2y)dy = 2x dx \quad \text{e} \quad \int (1 + 2y)dy = \int 2x dx.$$

Calculando as integrais, encontramos a solução geral em forma implícita:  $y + y^2 = x^2 + C$ .

Substituindo  $x = 2$  e  $y = -1$ , encontramos  $C = -4$ . Portanto a solução do PVI (6) em forma implícita é

$$y + y^2 = x^2 - 4.$$

Usando a fórmula de Bhaskara, podemos isolar  $y$  e encontramos

$$y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{x^2 - \frac{15}{4}}.$$

Para determinar qual é o sinal que serve, fazemos novamente  $x = 2$  e  $y = -1$ . Temos

$$-1 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{4 - \frac{15}{4}},$$

isto é,

$$-\frac{1}{2} = \pm \sqrt{4 - \frac{15}{4}}.$$

Portanto o sinal que serve é o de menos. Logo a solução do PVI (6) em forma explícita é

$$y = -\frac{1}{2} - \sqrt{x^2 - \frac{15}{4}}.$$

Vamos agora determinar o domínio da solução. É preciso que  $x^2 - \frac{15}{4} \geq 0$ , ou seja,  $\frac{15}{4} \leq x^2$ . Devemos ter

$$x \geq \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{ou} \quad -x \leq -\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Os intervalos de definição de soluções de EDO's são tomados sempre abertos. Isto porque a EDO envolve derivada. No Cálculo, define-se derivada de uma função em um ponto interior do intervalo. Por isto, ficamos com  $I = (-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{2})$  ou  $I = (\frac{\sqrt{15}}{2}, +\infty)$ . Mas o intervalo de definição da solução deve conter o  $x$  da condição inicial. Logo  $I = (\frac{\sqrt{15}}{2}, +\infty)$ .

Observação: Outra maneira de ver que o intervalo de definição não poderia ser fechado é notar que  $x$  nem poderia assumir o valor  $\frac{\sqrt{15}}{2}$  por uma outra razão. Se  $x = \frac{\sqrt{15}}{2}$ , então  $y = -\frac{1}{2}$ , anulando o denominador do lado direito da EDO.

A questão original está resolvida mas é interessante voltar à solução geral  $y + y^2 = x^2 + C$  da EDO e fazer uma análise geométrica. Por ser uma equação algébrica de grau 2, a solução geral é uma família de cônicas. Para ter uma idéia melhor, completamos os quadrados

$$y^2 + y + \frac{1}{4} = x^2 + C + \frac{1}{4}.$$

Incorporamos a fração do lado direito à constante, obtendo

$$x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = C,$$

que é uma família de hipérbolas (em alguns casos só metades de ramos de hipérbolas).

