LISTA 9

Exercício 1

Seja $f(x)$ a função $2\,\pi$–periódica tal que $f(x) = x^2$, para $-\pi \le x \le \pi$.

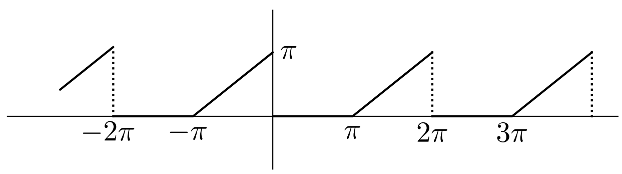
(a) Encontre a expansão de $f(x)$ em série de Fourier.

(b) Dando um valor conveniente a x, obtenha que

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,.$$

Exercício 2

(a) Obtenha o desenvolvimento em série de Fourier da função



(b) Dando valores convenientes para x, obtenha que

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \,.$$

Exercício 3

Obtenha o desenvolvimento em série de Fourier das funções:

(a) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

(b) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^+ = \begin{cases} \operatorname{sen} x\,, & \text{se} \quad \operatorname{sen} x \ge 0 \\ 0\,, & \text{se} \quad \operatorname{sen} x < 0 \end{cases}$

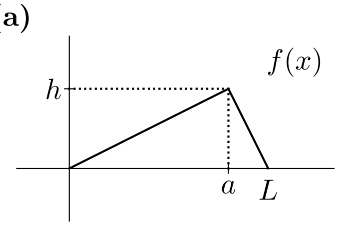
(c) $f(x)$ a função periódica de período 3 tal que $f(x) = x$ para $0 < x < 3$. SUGESTÃO: Para simplificar os cálculos, comece encontrando uma constante C conveniente para a qual $f(x) - C$ seja uma função ímpar.

(d) $f(x)$ a função periódica de período 2 tal que $f(x) = \cos \dfrac{\pi\, x}{2}$, para $-1 < x < 1$.

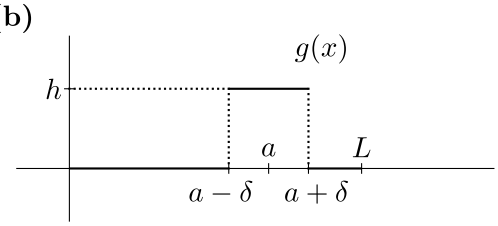
Exercício 4

Determine a expansão por série de Fourier-seno das funções, válido para $0 \le x \le L$

(a)



(b)



Exercício 5

(a) Obtenha o desenvolvimento da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em série de cossenos, válido para todo x no intervalo $0 \leq x \leq \pi$. *Observe que a extensão par da função é contínua em* $[-\pi, \pi]$ *porém* $f'(x)$ *é contínua por intervalos e seus coeficientes* **decrescem a** 0 **na ordem de** $\dfrac{1}{n^2}$.

(b) Obtenha o desenvolvimento da função $f(x) = \cos x$ em série de senos, válido para todo x no intervalo $0 < x < \pi$. *Observe que a extensão ímpar da função* $f(x)$ *e* $f'(x)$ *são contínuas por intervalo e seus coeficientes* **decrescem a** 0 **na ordem de** $\dfrac{1}{n}$.

Exercício 6

(a) Verifique que a função

$$f(x) = \begin{cases} x\,(\pi - x)\ , & \text{se} \quad 0 < x < \pi \\ x\,(\pi + x)\ , & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

é ímpar e encontre sua expansão em série de Fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$. *Observe que a função* $f(x)$, $f'(x)$ *são funções contínuas, porém* $f''(x)$ *é contínua por intervalo e seus coeficientes* **decrescem a** 0 **na ordem de** $\dfrac{1}{n^3}$.

(b) Dando um valor conveniente a x , determine a soma da série

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots\cdots$$

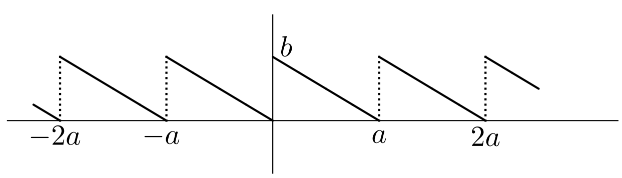
Exercício 7

Obtenha o desenvolvimento em série de cossenos para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1\ , & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0\ , & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Exercício 8

Encontre a expansão em série de Fourier para a função



Sugestão: Subtraia de $f(x)$ uma constante C conveniente para que $g(x) = f(x) - C$ seja uma função ímpar. Expanda a função $g(x)$ em série de Fourier. A partir daí é imediato obter a expansão de $f(x)$.

Exercício 9

Seja $f(x)$ a função periódica de período 1 tal que $f(x) = x^2$, para $0 < x < 1$.

(a) Encontre a expansão de $f(x)$ em série de Fourier. SUGESTÃO: É conveniente usar o fato que se uma função é P–periódica, então sua integral em qualquer intervalo de comprimento P tem o mesmo valor. Portanto, para calcular os coeficientes de Fourier, se for conveniente, a integral entre $-L$ e L pode ser substituída, por exemplo, pela integral entre 0 e $2\,L$.

(b) Usando o item (a) e fazendo $x = 0$, obtenha que

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \, .$$

(c) Usando o item (a) e dando um valor conveniente para x, obtenha que

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \cdots\cdots \, .$$

<u>Exercício 10</u>

Obtenha o desenvolvimento em série de senos para a função

$$f(x) = \begin{cases} x \, , & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 \, , & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

RESPOSTAS

1. (a) $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\left(\dfrac{\cos x}{1^2} - \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right) = x^2$, para $-\pi \leq x \leq \pi$.

2. (a) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) - \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{1} + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots\right)$

(b) Para a 1ª faz $x = 0$, lembrando que este ponto é de descontinuidade. Para a 2ª faz $x = \dfrac{\pi}{2}$.

3. (a) $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$

(b) $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{2} - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$

(c) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{\pi}\left(\operatorname{sen} \dfrac{2\pi x}{3} + \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} \dfrac{4\pi x}{3} + \dfrac{1}{3} \operatorname{sen} \dfrac{6\pi x}{3} + \cdots\cdots\right)$

(d) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos n\pi x\right)$

4. (a) $f(x) = \dfrac{2hL^2}{\pi^2 a(L-a)} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{L}$

(b) $f(x) = \dfrac{4\,h}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi \delta}{L} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{L}$.

5. (a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \dfrac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \dfrac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\cdots\right)$, para $0 \leq x \leq \pi$.

(b) $\cos x = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{2\,\mathrm{sen}\,2x}{1\cdot 3} + \dfrac{4\,\mathrm{sen}\,4x}{3\cdot 5} + \dfrac{6\,\mathrm{sen}\,6x}{5\cdot 7} + \cdots\cdots\right)$, para $0 < x < \pi$.

6. (a) $f(x) = \dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{1^3} + \dfrac{\mathrm{sen}\,3x}{3^3} + \dfrac{\mathrm{sen}\,5x}{5^3} + \cdots\cdots\right)$

(b) Para $x = \dfrac{\pi}{2}$, obtém-se $\dfrac{\pi^3}{32} = 1 - \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{7^3} + \cdots\cdots$

7. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2\,n-1}\,\cos\dfrac{(2n-1)\,\pi x}{2}$

8. $f(x) = \dfrac{b}{2} + \dfrac{b}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2n\pi x}{a}$

9. (a) $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n\pi x)}{n^2} - \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{sen}\,(2n\pi x)}{n}$. **(c)** Basta fazer $x = \dfrac{1}{2}$

10. $f(x) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\,\mathrm{sen}\,n\pi x + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{2\,(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\right)\mathrm{sen}\,\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}$