MAT 01167 Equações Diferenciais

LISTA 6

Exercício 1. Resolva pelo método dos coeficientes a determinar:

a. $y'' - 2y' - 3\,y = 3e^{2\,x} - 3xe^{-x}$

b. $y'' + 2y' = 3 + 4\,\text{sen}\,2\,x$

c. $y'' - y' - 2y = xe^{-x} + 2e^{-x} - e^{2\,x}$

d. $y'' - y' - 2y = 1 + \text{ sen}\,2x + e^{-x}$

e. $y'' + y = \text{ sen}\,x \quad , \quad y(0) = 2 \ , \quad y'(0) = -1$

f. $y'' + 4y = \cos 2x \quad , \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 0$

g. $y'' - 2y' - 3\,y = 2xe^{3\,x}$

h. $y'' - 2y' + y = te^{t} + 4 \quad , \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 1$

Exercício 2. Indique de que forma deve-se procurar uma solução particular das equações diferenciais, sem, contudo, determinar os coeficientes:

(a) $y'' - 3y' = x^3 - 2e^{3x} + \cos 2x$ **(b)** $y'' + 9y = \cos 3x + 2\ \text{sen}\,2x$

Exercício 3. Considere oscilações forçadas descritas pelo P.V.I.

$$y'' + \frac{1}{4}y' + 2y = 2\ \cos\alpha t \ , \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 2 \ .$$

(a) Obtenha que a solução é dada por $y(t) = y_t(t) + y_e(t)$, onde $y_t(t)$, chamado parte transiente, satisfaz $y_t(t) \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow +\infty$ e $y_e(t)$, chamada solução estacionária, é periódica. Obtenha a expressão de $y_e(t)$.

(b) Reescrevendo a solução estacionária na forma $y_e(t) = A\ \text{sen}\,(\alpha\,t + \phi)$, determine a amplitude da solução estacionária.

(c) Determine o valor máximo da amplitude A e a freqüência angular α da força externa para a qual ele ocorre. **Sugestão:** Obtenha a expressão de $A = A(\alpha)$ como função de α e use as técnicas do Cálculo 1.

<u>Exercício 4</u>. Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + by' = 3 \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Encontre o comportamento da solução quando $t \longrightarrow +\infty$ para todos os valores possíveis de b (não esqueça de $b = 0$).

RESPOSTAS

1a. $y = -e^{2\,x} + \left(\frac{3}{16}\,x + \frac{3}{8}\,x^2\right) e^{-x} + C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{3\,x}$

1b. $y = \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\cos 2\,x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\,x + C_1 + C_2\,e^{-2\,x}$

1c. $y = \left(-\frac{7}{9}\,x - \frac{1}{6}\,x^2\right) e^{-x} - \frac{1}{3}\,x\,e^{2\,x} + C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2\,x}$

1d. $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{20}\cos 2\,x - \frac{3}{20}\operatorname{sen} 2\,x - \frac{1}{3}\,x\,e^{-x} + C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{-x}$

1e. $y = -\frac{1}{2}\,x\cos x + 2\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$

1f. $y = \frac{1}{4}\,x\ \operatorname{sen} 2\,x$

1g. $y = \left(\frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{8}\,x\right) e^{3\,x} + C_1\,e^{3\,x} + C_2\,e^{-x}$

1h. $y = 4\,t\,e^t - 3\,e^t + \frac{1}{6}\,t^3 e^t + 4$

2. (a) $y = C_1\,x + C_2\,x^2 + C_3\,x^3 + C_4\,x^4 + C_5\,x\,e^{3\,x} + C_6\,\cos 2\,x + C_7 \operatorname{sen} 2\,x$

(b) $y = x\,(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x) + (C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x)$

3. (a) $y_e(t) = \dfrac{32\big(2-\alpha^2\big)\cos\,\alpha\,t + 8\,\alpha \operatorname{sen}\alpha\,t}{16\,\alpha^4 - 63\,\alpha^2 + 64}$ **(b)** $A = \dfrac{8}{\sqrt{16\,\alpha^4 - 63\,\alpha^2 + 64}}$

(c) $A_{\max} = \dfrac{64}{\sqrt{127}} \approx 5.6791$, para $\alpha = \dfrac{3\sqrt{14}}{8} \approx 1.4031$.

4. Resolvendo o PVI encontra-se $y(t) = \dfrac{3e^{-bt}}{b^2} + \dfrac{3t}{b} + \dfrac{b^2-3}{b^2}$ se $b \neq 0$ e $y(t) = \dfrac{3t^2}{2} + 1$ se $b = 0$. Portanto em qualquer um dos 3 casos $b > 0$, $b < 0$ ou $b = 0$ tem-se $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ (em cada um deles por uma razão diferente).