MAT 01167 Equações Diferenciais

LISTA 5

Exercício 1. Resolva as seguintes EDOLH

a. $y'' - 2y' - 3y = 0$

b. $y'' + 2y' = 0$

c. $y'' - y' - 2y = 0$

d. $4y'' - 4y' + y = 0$

e. $y'' + 2y' + 10y = 0$

f. $y'' + 9y = 0 \;,\quad y(\frac{\pi}{2}) = 2 \,,\quad y'(\frac{\pi}{2}) = 1$

g. $y'' + 2y = 0 \;,\quad y(0) = 2 \,,\quad y'(0) = -1$

h. $y'' + 4y' + 3y = 0$

i. $y'' - 2\,y' + y = 0 \;,\quad y(0) = 1 \,,\quad y'(0) = 1$

j. $y'' + 2\,y' + 5\,y = 0$

Exercício 2. Encontre uma EDO do tipo $y'' + ay' + by = 0$ que tenha o seguinte sistema fundamental de soluções:

a. $\{e^{2x}, e^{x}\}$

b. $\{e^{2x}, e^{-x}\}$

c. $\{e^{5x}, xe^{5x}\}$

d. $\{e^{-x}\cos x, e^{-x}\operatorname{sen} x\}$

Exercício 3. Determine os valores da constante λ para que o problema de fronteira possua soluções não triviais para um $L > 0$:

$$(a)\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \,, \quad y(L) = 0 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0 \,, \quad y'(L) = 0 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \,, \quad y'(L) = 0 \end{cases}$$

Exercício 4. Determine as condições que α e β devem satisfazer para que a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = \alpha \,, \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

satisfaça a condição $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Exercício 5. Considere o PVI

$$\begin{cases} 4y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \,, \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

Determine β para o qual se tenha $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0\,.$

Exercício 6.

As oscilações livres em um sistema massa–mola com amortecimento supercrítico são governadas pela equação diferencial $y'' + 5\,y' + 6\,y = 0$. A massa inicia seu movimento a partir da posição inicial $y(0) = 2$, com velocidade inicial $y'(0) = v_0$. Qual a condição que v_0 deve satisfazer para que a massa passe uma vez pela posição de equilíbrio?

Exercício 7. Para que valores de a e b todas as soluções da EDO $y'' + ay' + by = 0$ satisfazem a condição $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$? **Sugestão:** Mostre que se $b < 0$, então as raízes da equação característica são reais e têm sinais contrários. Se $b = 0$ mostre que 0 é uma raiz da equação característica. Se $b > 0$ as raízes podem ser reais ou complexas. Analise os dois casos.

RESPOSTAS

1a. $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$

1b. $y = C_1 + C_2 e^{-2t}$

1c. $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$

1d. $y = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 t e^{\frac{1}{2}t}$

1e. $y = e^{-t}\,(C_1 \cos 3t \;+\; C_2 \cos 3t)$

1f. $y = \dfrac{1}{3}\cos 3t \;-\; 2 \operatorname{sen} 3t$

1g. $y = 2\cos\left(\sqrt{2}\,t\right) - \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\,t\right)}{\sqrt{2}}$

1h. $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$

1i. $y = e^{t}$

1j. $y = e^{-t}\,(C_1\, \cos 2t \;+\; C_2 \cos 2t)$

2a. $y'' - 3y' + 2y = 0$

2b. $y'' - y' - 2y = 0$

2c. $y'' - 10y' + 25y = 0$

2d. $y'' + 2y' + 2y = 0$

3.(a) $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

3.(b) $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

3.(c) $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}$ para $n = 1, 2, 3, 4, ...$

4. $\beta = -\alpha$

5. $\beta = -1.$

5. Resolvendo o PVI encontra-se $y(t) = \dfrac{3e^{-bt}}{b^2} + \dfrac{3t}{b} + \dfrac{b^2 - 3}{b^2}$ se $b \neq 0$ e $y(t) = \dfrac{3t^2}{2} + 1$ se $b = 0$. Portanto em qualquer um dos 3 casos $b > 0$, $b < 0$ ou $b = 0$ tem-se $\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$ (em cada um deles por uma razão diferente).

6. $v_0 < -6$.

7. $a > 0$ e $b > 0$.