MAT 01167 Equações Diferenciais

LISTA 4

Questão 1. Resolva as equações diferenciais abaixo, reduzindo a uma equação de primeira ordem:

(a) $1 + (y')^2 = 2\,y\,y''$

(b) $y'' + (y')^2 = y \quad , \quad y(0) = \dfrac{3}{2} \quad , \quad y'(0) = 1$

(c) $y\,y'' + (y')^2 = 0$

(d) $y\,y'' = (y')^2 + y^2\,y' \quad , \quad y(0) = -\dfrac{1}{2} \quad , \quad y'(0) = 1$

Questão 2.
(a) Resolva a equação diferencial

$$y'' = x\,\left(y'\right)^2 \ .$$

(b) Encontre a expressão da solução e o intervalo máximo de definição da solução para o problema de valor inicial

$$y'' = x\,\left(y'\right)^2 \ , \quad y(0) = 3 \ , \quad y'(0) = 2 \ .$$

(c) Faça o mesmo para

$$y'' = x\,\left(y'\right)^2 \ , \quad y(2) = 3 + \ln 3 \ , \quad y'(2) = -\frac{2}{3} \ .$$

Questão 3. Resolva a equação diferencial $y^{(4)} - \dfrac{2}{x}\,y^{(3)} = 5\,x^2$. **Sugestão:** Faça $z = y^{(3)}$.

Questão 4. Além dos casos tratados em aula, há um **outro** caso simples de equação de $2^{\underline{a}}$ ordem redutível à $1^{\underline{a}}$ ordem. Se uma função $F(x, y, y', y'')$ satisfaz a condição

$$F(x, \lambda\,y, \lambda\,y', \lambda\,y'') = \lambda^k F(x, y, y', y'') \ \ ,$$

dizemos que $F(x, y, y', y'')$ é homogênea de grau k em y e suas derivadas. Neste caso a equação diferencial $F(x, y, y', y'') = 0$ se reduz à primeira ordem pela substituição

$$z = z(x) = \frac{y'}{y} \quad , \quad y' = z\,y \quad , \quad y'' = y\,z' + y'z = y\,z' + y\,z^2 \ \ .$$

Use este método para resolver:

(a) $x\,y\,y'' = x\,(y')^2 + y\,y'$.

(b) $y\,y'' = 2\,x\,(y')^2 \quad , \quad y(2) = 2 \quad , \quad y'(2) = \dfrac{1}{2}$.

<u>Exercício 5</u>. Dada a EDOLH e uma solução, determine uma segunda solução L.I., utilizando o método de D'Alembert, e indique a solução geral da EDO.

a) $(x-1)\,y'' - x\,y' + y = 0 \quad , \quad y_1 = e^x$

b) $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad , \quad y_1(x) = x$

c) $x^2\,y'' - x\,(x+2)\,y' + (x+2)\,y = 0 \quad , \quad y_1 = x$

d) $x\,y'' - (2x+1)\,y' + (x+1)\,y = 0 \quad , \quad y_1 = e^x$

e) $x\,y'' - y' + 4x^3 y = 0 \quad , \quad y_1 = \operatorname{sen} x^2$

f) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad , \quad y_1(x) = x$

g) $x\,y'' - (1+4x^2)\,y' + 4x^3\,y = 0 \quad , \quad y_1(x) = e^{x^2}$

h) $(x^3 - x^2)\,y'' - (7x^2 - 6x)\,y' + (15x - 12)\,y = 0 \quad , \quad y_1(x) = x^3$

<u>Exercício 6</u>. Classifique as seguintes E.D.O., indique todos os possíveis métodos de resolução e resolva por um deles:

a) $(x+1)^2 y' = 6 - 4xy - 4y$

b) $y' = \dfrac{y}{y-x}$

c) $(\cos x)y' = (\operatorname{sen} x)y$

d) $x^2(\cos x - y) - y^2 + (2xy - x^3)y' = 0.$

<u>Exercício 7</u>. Dada a E.D.O. $y' = by - y^2$, onde b é um número real,

a) Classifique a E.D.O., dizendo quais métodos podem ser empregados em sua resolução.

b) Determine os pontos de equilíbrio e esboce os gráficos das soluções.

c) Determine a estabilidade das soluções constantes.

d) Resolva a E.D.O. por um dos métodos mencionados no item a).

e) Verifique que as soluções obtidas em d) para deferentes condições iniciais correspondem às obtidas em b).

RESPOSTAS

1. **(a)** $4\,(C_1\,y-1)=(C_1\,x+C_2)^2$ **(b)** $y=\dfrac{x^2}{4}+x+\dfrac{3}{2}$

(c) $y=\pm\sqrt{C_1\,x+C_2}$ **(d)** $2\,y-3=8\,y\,e^{\frac{3\,x}{2}}$

2. **(a)** $y=\dfrac{1}{C_1}\ln\left|\dfrac{C_1+x}{C_1-x}\right|+C_2$, $y=-\dfrac{2}{C_1}\arctan\left(\dfrac{x}{C_1}\right)+C_2$, $y=C$, $y=\dfrac{2}{x}+C$

(b) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+3$, $I=(-1,\,1)$

(c) $y=\ln\dfrac{1+x}{x-1}+3$, $I=(1,\infty)$

3. $y=\dfrac{x^6}{24}+C_1\,x^5+C_2\,x^2+C_3\,x+C_4$

4. (a) $y=C_1\,e^{C_2x^2}$ **(b)** $y^5=\dfrac{8\,(x+2)}{3-x}$

5a. $y_2=x,\quad y(x)=C_1\,e^x+C_2x$ **5b.** $y_2=\dfrac{1}{x^2},\quad y(x)=C_1x+C_2\dfrac{1}{x^2}$

5c. $y_2=xe^x,\quad y(x)=C_2\,xe^x+C_1x$ **5d.** $y_2=e^x,\quad y(x)=C_1e^x+C_2x^2e^x$

5e. $y_2=\cos x^2,\qquad y(x)=C_1\,\mathrm{sen}\,x^2+C_2\cos x^2$

5f. $y_2=-1+\dfrac{x}{2}\,\ln\left(\dfrac{|1+x|}{|1-x|}\right),\qquad y(x)=C_1x+C_2\left[-1+\dfrac{x}{2}\,\ln\left(\dfrac{|1+x|}{|1-x|}\right)\right]$

5g. $y_2=x^2e^{x^2},\qquad y(x)=C_1e^{x^2}+C_2x^2e^{x^2}$

5h. $y_2=x^5-2x^4,\qquad y(x)=C_1x^3+C_2(x^5-2x^4)$

6a. $y=\dfrac{2(x+1)^3+C}{(x+1)^4}$ **6b.** $y^2-2xy=C$

6c. $y=C\sec x$ **6d.** $y=\dfrac{x^2\pm\sqrt{x^4-4x(\,\mathrm{sen}\,x+C)}}{2}$