MAT 01167 Equações Diferenciais

LISTA 3

Resolva:

1. $y' = \dfrac{y}{x} + x\,y^3 \quad , \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$

2. $2\,\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} + y^3 \cos x = 0$

3. $(1 - x^3)\,\dfrac{dy}{dx} - 2\,(1 + x)\,y = y^{\frac{5}{2}}$

4. $y' = ky - ay^3$

5. Se uma função $F(x, y)$ satisfaz a condição

$$F(t\,x, t\,y) = F(x, y) \ ,$$

dizemos que $F(x, y)$ é homogênea de grau 0. Neste caso a equação diferencial $y' = F(x, y)$ se reduz à uma equação separável pela substitução

$$z = z(x) = \frac{y}{x} \quad , \quad y' = x\,z' + z\,.$$

Use este método para resolver

(a) $y' = \dfrac{2x}{x + y}$.

(b) $y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$

6. Um projétil penetra numa placa de madeira de 0,1 m de espessura com uma velocidade $v_0 = 200\,\text{m/s}$, saindo do outro lado com uma velocidade $v_1 = 80\,\text{m/s}$. Supondo que a madeira ofereça uma forca de resistência ao movimento do projétil proporcional ao quadrado da velocidade, determine o tempo que o projétil leva para atravessar a placa de madeira.

7. Certa quantidade de uma substância contendo 3 kg de água foi colocada dentro de um depósito de $100\,\text{m}^3$ de volume, onde a umidade relativa do ar era inicialmente 25%. Se no final do 1º dia a substância tinha perdido por evaporação metade da água, determine qual a fração da água que restará ao final do 2º dia. Em algum momento a água toda evaporará?

Dados: – Durante todo o tempo a temperatura no depósito se manteve a 30°C.

– À temperatura de 30°C, o ar saturado contém 0,12 kg de água por m^3.

– A velocidade de evaporação da água contida numa substância porosa é proporcional à quantidade de água existente na substância e à diferença entre a umidade do ar que a rodeia e a umidade do ar saturado (isto é, diretamente proporcional ao produto destas duas quantidades).

8. Considere a EDO $y' = a(y^2 - 1)(y + 2)$ onde a é um número real não nulo.

a) Como podemos ter $a > 0$ ou $a < 0$, faça, para cada um destes casos, o esboço das soluções desta equação <u>sem resolvê-la</u>, encontre suas soluções de equilíbrio e classifique-as em estável, instável ou semi-estável.

b) Para que valores de a a equação apresenta somente dois pontos de equilíbrio estáveis?

9. (a) Sem resolver a equação diferencial

$$y' = \left(y^2 - 1\right)y^2$$

faça um esboço das soluções e encontre as soluções de equilíbrio, dizendo em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou semi-estável.

(b) Forme o problema de valor inicial acrescentando a condição inicial $y(0) = \beta$. Para quais valores de β a solução do problema de valor inicial posui um limite $\lim_{t\to\infty} y(t)$ finito?

10. (a) Sem resolver a equação diferencial

$$y' = \left(y + 1\right)^2\left(y - 1\right)y$$

faça um esboço das soluções e encontre as soluções de equilíbrio, dizendo em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou semi-estável.

(b) Forme o problema de valor inicial acrescentando a condição inicial $y(0) = \beta$. Para quais valores de β a solução do problema de valor inicial posui um limite $\lim_{t\to\infty} y(t)$ finito?

11. Sem resolver a equação diferencial $y' = \operatorname{sen} y$, faça um esboço das soluções e encontre as soluções de equilíbrio, dizendo em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou semi-estável.

12. Seja $y(t)$ a população de camarões na lagoa dos Patos, supondo que os camarões são capturados a uma taxa constante R camarões por semana e a população satisfaz a equação logística

$$y' = ay - by^2 - R$$

onde $a > 0$, $b > 0$ e $R > 0$.

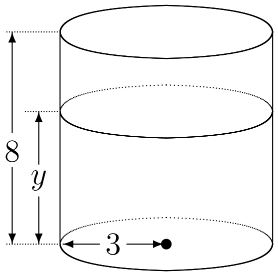
(a) Determine os dois pontos de equilíbrio (y_1 e y_2) para $R < \dfrac{a^2}{4b}$, esboce o gráfico das soluções e analise sua estabilidade.

(b) Prove que se a população inicial é menor que $y(0) < y_1 < y_2$, os camarões se extingem em um tempo finito, porém se $y(0) > y_1$ a população tende a y_2 quando t cresce.

(c) Para $R = \dfrac{a^2}{4b}$, a EDO possui um único ponto de equilibrio que é semi-estável.

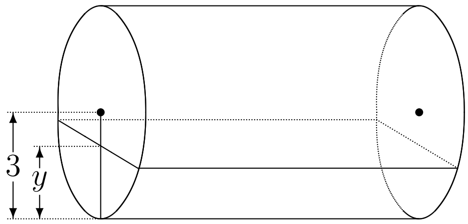
(d) Para $R > \dfrac{a^2}{4b}$, a população decresce.

13.



Um tanque d'água tem a forma de um cilindro de 3 m de raio e 8 m de altura e está inicialmente cheio. No fundo do tanque existe uma pequena abertura circular de área igual a a m^2. Indique por $y = y(t)$ a altura da água no tanque no instante t. Sabe-se que a velocidade com que a água deixa o tanque pela abertura no fundo é de $\sqrt{2\,g\,y}$ m/s. Encontre a altura y da água no tanque em função de t e o instante que o tanque esvazia.

14. Um tanque de água tem a forma de um cilindro deitado de 3 m de raio e 8 m de comprimento e está inicialmente cheio pela metade. No ponto mais baixo do tanque existe uma pequena abertura circular de raio a. Indique por y a altura da água no tanque. Sabendo que a velocidade com que a água deixa o tanque pela abertura no fundo é de $\sqrt{2\,g\,y}$ e que inicialmente a altura da água no tanque é de 3 m,



(a) Quanto tempo leva o tanque para esvaziar completamente?

(b) Qual a expressão de y em função de t?

15. Suponha que uma comunidade de 15.000 pessoas está exposta a uma doença contagiosa que se espalha. No instante $t = 0$, o número $N = N(t)$ de pessoas que infectadas é de 5.000 e está crescendo a uma taxa de 500 pessoas por dia. A taxa de crescimento $N'(t)$ em cada instante depende da probabilidade de encontro de uma pessoa saudável com uma doente neste instante. Dado que este fato se expressa matematicamente dizendo que $N'(t)$ é proporcional ao produto do número de indivíduos que têm a doença pelo número dos que não a têm,

(a) Deduza a equação diferencial que governa este processo.

(b) Quanto tempo levará para que outras 5.000 pessoas peguem a doença?

16. Resolva as equações diferenciais abaixo através de uma mudança de variável conveniente.

(a) $\big(x - y\big)^2 \dfrac{dy}{dx} = 4$. **Sugestão:** $u = x - y$.

(b) $y\,dx + \big(1 + y^2 e^{2x}\big)dy = 0$. **Sugestão:** $u = ye^x$.

(c) $2yy' + x^2 + y^2 + x = 0$. **Sugestão:** $u = y^2$.

17. **(a)** Resolva a equação de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$$

através dos seguintes passos:

- verifique que $y_1 = 2$ é uma solução.
- use a mudança de variável $y = y_1 + u$ para transformá-la em uma equação de Bernoulli (na variável u).
- resolva a equação de Bernoulli resultante para encontrar u.
- deduza daí a solução y da equação original.

(b) Resolva a mesma equação por separação de variáveis. Transforme a solução encontrada até chegar à mesma expressão obtida no item (a). **Sugestão:** Fatore e use frações parciais.

18. Encontre uma mudança de variável que transforme a equação

$$xe^{2y}\frac{dy}{dx} + e^{2y} = \frac{\ln x}{x}$$

em uma equação linear e depois resolva-a.

RESPOSTAS

1. $y = \dfrac{2\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1-4\,x^4}}$

2. $xy^{-2} = \cos x + x \operatorname{sen} x + C \quad , \quad y = 0$

3. $y = \left(\dfrac{C\,(1-x)^2 - 3}{4(1+x+x^2)}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad y = 0$

4. $y(x) = \pm\left(Ce^{-2kx} + \dfrac{a}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}$

5. **(a)** $|2\,x + y|\,|x - y|^2 = C$

(b) $y = C\,e^{\frac{y}{x}}$.

6. $t_1 = \dfrac{3}{4000(\ln 5 - \ln 2)} \approx 0.00081\,\mathrm{s}.$

7. A fração que restará é de 3/11. A quantidade de água presente na substância é dada em função do tempo por $Q(t) = \dfrac{2\left(\frac{3}{5}\right)^t}{1-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^t}$. A função $Q(t)$ é decrescente (numerador decrescente, denominador crescente), $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = 0$, mas o valor 0 nunca é atingido.

8. (a) Para $a > 0$ os pontos de equilíbrio: $y = -2$ instável , $y = -1$ estável , $y = 1$ instável.

Para $a < 0$ os pontos de equilíbrio: $y = -2$ estável , $y = -1$ instável , $y = 1$ estável.

(b) $a < 0$

9. (a) Pontos de equilíbrio: $y = 1$ instável , $y = 0$ semi-estável , $y = -1$ estável.

(b) O limite existe para $-\infty < \beta \leq 1$.

10. (a) Pontos de equilíbrio: $y = 1$ instável , $y = 0$ estável , $y = -1$ semi-estável.

(b) O limite existe para $-\infty < \beta \leq 1$.

11. As soluções de equilíbrio são as $y = n\pi$. O equilíbrio é estável para n ímpar e instável para n par.

12. $y_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4bR}}{2b}, \quad y_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4bR}}{2b}$

13. O tempo para esvaziar é $t_f = \dfrac{36\,\pi}{a\sqrt{g}}$ seg e $y(t) = \left(2\sqrt{2} - \dfrac{a\sqrt{2g}\,t}{18\,\pi}\right)^2$

14. (a) $t_f = \dfrac{32\,(6\sqrt{6} - 3\sqrt{3})}{3\,\pi\,a^2\sqrt{2\,g}}$ seg **(b)** $y = 6 - \left(\dfrac{3\,\pi\,a^2\sqrt{2\,g}}{32}\,t + 3\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

15. $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{(15.000 - N)\,N}{100.000}$ **(b)** $\dfrac{20\,\ln 4}{3} \approx 9{,}24$ dias.

16. (a) $y = \ln\left|\dfrac{x-y-2}{x-y+2}\right| + C, \quad y = x+2, \quad y = x-2.$

(b) $2y^2\big(\ln|y| + C\big) = e^{-2x}, \quad y = 0.$

(c) $x^2 + y^2 = x - 1 + Ce^{-x}.$

17. $y = 2 + \dfrac{1}{Ce^{-3x} - 1/3}, \quad y = 2.$

18. $x^2e^{2y} = 2x\ln x - 2x + C.$