MAT 01167 Equações Diferenciais

LISTA 2

1. Determine as soluções das seguintes equações diferenciais:

(a) $6x^2y + 2xy^2 + \big(2x^3 + 2x^2y\big)y' = 0$

(b) $\big(2xe^y - y\text{sen}x\big)dx + \big(\cos x - 2 + x^2e^y\big)dy = 0$

2. Resolva a equação $\big(3x^2y + 2xy + y^3\big)dx + \big(x^2 + y^2\big)dy = 0$, encontrando um fator integrante dependendo só de x.

3. Resolva a equação $y + \big(2xy - e^{-2y}\big)y' = 0$, usando um fator integrante dependendo só de y.

4. (a) Justifique que para que uma equação diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ admita um fator integrante $\mu = \mu(x)$, dependendo só de x, é necessário que $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ dependa só de x.

(b) Verifique que a equação

$$2x^{-2}e^x - xy^2 + 2xyy' = 0$$

admite um fator integrante dependendo só de x e resolva a equação.

5. (a) Justifique que para que uma equação diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ admita um fator integrante $\mu = \mu(y)$, dependendo só de y, é necessário que $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ dependa só de y.

(b) Verifique que a equação

$$\Big(3\,y + y^2 + \big(2 + y\big)\,\text{sen}\,x\Big)\,y' + y\,\cos x = 0$$

admite um fator integrante dependendo só de y, porém não admite um fator integrante que depende somente de x. Resolva a equação.

6. Verifique que a equação

$$\big(1 + e^x\big)y - \big(x + e^x\big)y' = 0$$

admite um fator integrante dependendo só de y e também fator integrante dependendo só de x. Resolva a equação de duas maneiras, cada vez empregando um dos fatores integrantes.

Resolva:

7. $y' + ay = x$

8. $x\,y' - y = x^2 \cos x$

9. $y' + y \tan x = x \operatorname{sen} x \cos x \;,\quad y(0) = 2$

10. $(x^2+1)\,\dfrac{dy}{dx} - x\,y = 1$

11. $y' = e^{2x} + y - 1 \quad , \quad y(0) = 1$

12. $2\,x\,y + 3\,x^2 + (x^2+2)\,y' = 0$

13. Resolva a equação $dx + \left(\dfrac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right) dy = 0$ procurando x como função de y (portanto considerando $\dfrac{dx}{dy}$).

14. Seja $u = u(t)$ a temperatura no instante t de um corpo imerso em um meio de temperatura constante u_m. A lei do resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de u é diretamente proporcional à diferença $u - u_m$, isto é, $\dfrac{du}{dt} = -\,k\,(u - u_m)$. Se um corpo aquecido a 120°C é posto em um ambiente a 30°C e sabe-se que em 5 min sua temperatura é de 90°C, encontre a expressão de u como função de t. Em quanto tempo será atingida a temperatura de 45°C?

15. No instante $t_0 = 0$ um tanque contém $200\,\ell$ de solução contendo 1 grama de corante por litro. Água pura entra no tanque à razão de $2\ \ell$/min e mistura sai à mesma razão. Quanto tempo transcorre até que a concentração de corante atinja 1% da concentração original?

16. Uma população de mosquitos, na ausência de outros fatores, aumenta a uma razão em cada instante proporcional à população corrente.

(a) Sabendo que a população dobra a cada semana e que no instante inicia $t_0 = 0$ é de 200.000 indivíduos, encontre a expressão do número de indivíduos em função do tempo.
Observação: Os dados do problema nos permitem dizer que

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad \text{com} \quad N(t+1) = 2N(t).$$

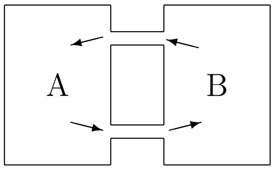
(b) Resolva o mesmo problema do item (a), supondo agora que exista uma espécie de pássaros predadores, que comem 20.000 mosquitos por dia (ou, 140.000 por semana, se você preferir usar a semana como unidade de tempo). A população de mosquitos vai se tornar extinta ou não? Justifique sua resposta.

17. Uma força eletromotriz de 100cos$t$ é aplicada a um circuito RC em série no qual a resistência é de 100 ohms e o capacitor de 10^{-4} farad.

(a) Determine a carga no capacitor no instante t, sabendo que a carga inicial é $Q(0) = 0$.

(b) Determine a carga estacionária do capacitor.

18. Inicialmente o tanque A como na figura contém 500 litros de água pura e o tanque B contém 500 litros de uma solução de 30 kg de sal em água. No instante $t_0 = 0$ bombas colocam o líquido a circular entre os tanques a uma razão de 10 litros por minuto.



(a) Encontre a expressão da quantidade de sal $Q(t)$ no tanque A em função do tempo. OBS: Para saber a quantidade de sal no tanque B no instante t, lembre que o total dos 2 tanques é sempre 30 kg.

(b) Em quanto tempo o tanque A irá conter 10 kg de sal?

19. **(a)** Uma bactéria em forma de esfera de raio $r = r(t)$, alimenta-se através de sua superfície. A alimentação tem a tendência a fazer com que seu volume aumente a uma taxa, a cada momento, proporcional à área da superfície. Além disto, o metabolismo da bactéria faz com que seu volume tenda a diminuir a uma taxa, em cada momento, proporcional ao volume. Expressando a superfície e o volume em função do raio, justifique que este satisfaz a uma equação diferencial da forma

$$\frac{dr}{dt} = a - b\,r \qquad (a > 0\ ,\ b > 0 \text{ constantes})\ .$$

(b) Existe um valor limite para o raio? Este limite é atingido em um tempo finito?

20. A concentração de CO_2 no ar de uma sala com capacidade de $5000\,\mathrm{m}^3$ é de 0,3%. Começa a ser bombeado para dentro da sala ar contendo 0,1% de CO_2 à razão de $100\,\mathrm{m}^3$ por minuto. Após bem misturado, a mesma quantidade de ar deixa a sala.

(a) Encontre a porcentagem de CO_2 na sala depois de 10 min.

(b) Depois de quanto tempo será atingida uma concentração de CO_2 de 0,2%?

RESPOSTAS

1. (a) $x^2y^2 + 2x^3y = C$ **(b)** $y\cos x + x^2e^y - 2y = C$

2. $\big(3x^2y + y^3\big)e^{3x} = C$

3. $xe^{2y} - \ln|y| = C \quad , \quad y = 0$

4. (b) $y^2e^{-x} - x^{-2} = C$

5. (b) $\big(y + \operatorname{sen} x\big)y^2\, e^y = C$

6. Fatores integrantes: $\mu_1(y) = y^{-2}$ e $\mu_2(x) = (x + e^x)^{-2}$

Solução geral: $y = C\big(x + e^x\big)$

7. Se $a \neq 0$, a solução geral é $y = \dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{a^2} + Ce^{-ax}$. Para $a = 0$ é $y = \dfrac{x^2}{2} + C$

8. $y(x) = x\,(C + \operatorname{sen} x)$

9. $y = \big(-x\,\cos x + \operatorname{sen} x + 2\big)\cos x$

10. $y = x + C\,\sqrt{1 + x^2}$

11. $y = 1 - e^x + e^{2\,x}$

12. $y = \dfrac{C - x^3}{x^2 + 2}$

13. $x\,y + y\,\cos y - \operatorname{sen} y = C$

14. (b) $u(t) = 30 + 90 \cdot e^{-\frac{t\,(\ln 3 - \ln 2)}{5}} = 30 + 90 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\frac{t}{5}}$, $t_1 = \dfrac{5\,(\ln 3 + \ln 2)}{\ln 3 - \ln 2} \approx 22.09$ min.

15. $100 \ln 100 \approx 460.51$ min.

16. (a) $Q(t) = 200\,000\,e^{t \ln 2} = 200\,000\,2^t$, t medido em semanas.

(b) $Q(t) = \left(200\,000 - \dfrac{140\,000}{\ln 2}\right)e^{t\ln 2} + \dfrac{140\,000}{\ln 2}$. Como o coeficiente da exponencial é negativo, para um t suficientemente grande $Q(t)$ vai se anular. Logo, a população de mosquitos se torna extinta. Fazendo os cálculos, encontramos que ela se torna extinta em aproximadamente 6.67 semanas.

17. (a) $Q(t) = -\dfrac{100}{10001}e^{-100t} + \dfrac{100}{10001}\cos t + \dfrac{1}{10001}\operatorname{sen} t$.

(b) $Q_s = \dfrac{100}{10001}\cos t + \dfrac{1}{10001}\operatorname{sen} t$.

18. (a) $Q(t) = 15\,(1 - e^{-\frac{t}{25}})$ **(b)** $25\,\ln 3 \approx 27{,}46$ min.

19. (b) $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = \dfrac{a}{b}$, mas este valor nunca é atingido em um tempo finito, a menos que o raio inicial r_0 já tenha este valor, pois, resolvendo a E.D., $r = \dfrac{a}{b} + \left(r_0 - \dfrac{a}{b}\right) e^{-b\,t}$.

20. (a) 0,26% de CO_2. **(b)** $t = 50 \ln 2 \approx 34{,}65$ min.