MAT 01167 Equações Diferenciais

LISTA 1

1. Verifique que as funções seguintes são soluções das equações diferenciais dadas:

(a) $x(t) = e^{2t} - 4,\qquad \dot{x} - 2x = 8$

(b) $y(x) = 3xe^{x},\qquad y'' - 2y' + y = 0$

(c) $z(s) = \sqrt{s^2 - a^2}\,,\qquad \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{s}{\sqrt{s^2 - a^2}}$, para $a \neq 0$

(d) $x(t) = 3(t+2),\qquad 4\ddot{x} - t\dot{x} + x = 6$

(e) Mostre que o par de funcões $x = e^{-2t} + 3e^{6t}$ e $y = -e^{-2t} + 5e^{6t}$ é uma solucão do sistema de equacões

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 5x + 3y$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

2. Prove que a seguinte relação define uma solução implícita da equação diferencial dada:

$$y = Ce^{\frac{y}{x}}\,,\qquad y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

3. Determine todos os valores de m para os quais a função $y(x) = x^m$ é solução em todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$ da equação diferencial

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

4. Verifique que a função dada é uma solução do problema de valor inicial (PVI):

(a) $y(x) = 5e^{-x}\qquad y' + y = 0,\qquad y(0) = 5$

(b) $y(t) = \displaystyle\int_0^t e^{2(t-s)}s^2\,ds\qquad y' = 2y + t^2,\qquad y(0) = 0$

5. Resolva as equações separáveis:

(a) $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}\quad ,\quad y(2) = 1$

(c) $y\,dx - \big(1+x\big)dy = 0$

(d) $y' \tan x = y\quad ,\quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

(e) $y' = \dfrac{\ln x}{1+y^2}\quad ,\quad y(1) = 0$

(f) $y' = xe^{x+y}$

6. (a) Encontre a solução geral em forma implícita para a equação diferencial

$$y' = -\frac{x-2}{2\,(y-1)} \quad .$$

(b) Completando os quadrados na resposta do item anterior, mostre que a solução geral é uma família de elipses. Faça um esboço destas elipses.

(c) Para o problema de valor inicial que se obtém acrescentando a condição inicial $y(2) = 0$, dê a expressão da solução e seu intervalo máximo de definição.

7. Resolva o problema de valor inicial abaixo, encontrando o intervalo máximo de definição da solução:

$$y' = \frac{1+y}{x-1} \quad , \quad y(-1) = -3 \quad .$$

8. Resolva a equação diferencial

$$y' = \frac{x}{2+y}$$

e faça um esboço da família das soluções encontrada. Para cada uma das condições iniciais abaixo, resolva o problema de valor inicial correspondente, encontrando o intervalo máximo de definição da solução:

(b) $y(0) = 0$ **(c)** $y(-3) = -3$ **(d)** $y(-2) = 0$

9. (a) Resolva a equação diferencial $y' = x^3 y^2$. Faça um esboço da família das soluções.

Encontre a expressão e o intervalo máximo de definição das soluções correspondentes a cada uma das condições iniciais abaixo:

(b) $y(0) = 4$ **(c)** $y(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}$ **(d)** $y(1) = -1$ **(e)** $y(-2) = 0$

10. (a) Resolva a equação diferencial

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = x\big(y-1\big)^3 \quad .$$

Encontre a expressão e o intervalo máximo de definição das soluções correspondentes a cada uma das condições iniciais abaixo. Faça também um esboço do gráfico destas soluções:

(b) $y(0) = 0$ **(c)** $y(0) = 1$ **(d)** $y(0) = 2$ **(e)** $y(0) = \frac{1}{2}$

11. Para a equação diferencial

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{dy}{dx} = xy^3 \quad ,$$

resolva o problema de valor inicial com cada uma das condições iniciais:

(a) $y(0) = 2$ **(b)** $y(0) = 0$

encontrando, em cada caso, o intervalo máximo de definição da solução.

12. Faça um esboço das isóclinas e do campo de direções associados às equações abaixo. A partir daí tente fazer um esboço das soluções. A seguir resolva as 3 primeiras equações por separação de variáveis e observe o quão acurados foram os esboços das soluções feitos anteriormente:

(a) $y' = \dfrac{x}{y}$ **(b)** $y' = 1 - y$ **(c)** $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$ **(d)** $y' = \dfrac{2x}{x+y}$

13. Para $a > 0$, mostre que as seguintes funções são soluções do PVI $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$:

(a) $y(x) = 0$ **(b)** $y(x) = \begin{cases} -x^2 \,, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ **(c)** $y(x) = \begin{cases} 0 \,, & \text{se } x \leq a \\ (x-a)^2, & \text{se } x > a \end{cases}$

14. Resolva a equação diferencial $y' = \dfrac{xy}{|xy|}$, $(x \neq 0\,,\ y \neq 0)$. Faça um esboço da família de soluções. Resolva o problema de valor inicial formado com cada uma das condições iniciais, encontrando em cada caso o intervalo máximo de definição e fazendo um esboço da solução:

(a) $y(1) = 2\,,$ **(b)** $y(-1) = 2\,,$ **(c)** $y(2) = -1\,.$

15. Interprete a seguinte afirmação como uma equacão diferencial. Sobre o gráfico de $y = \phi(x)$, a inclinação da reta tangente em um ponto P é o quadrado da distância de P à origem.

16. **(a)** Dê o domínio da funcão $y = |x|^{2/3}$.

(b) Calcule a derivada $y'(x)$ para x em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ e justifique que $y'(0)$ não existe.

(c) Verifique que a função $y = |x|^{2/3}$ é uma solucão de $3xy' - 2y = 0$ em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ ou $(0, \infty)$.

RESPOSTAS

3. $m = 2$.

5.(a) $y(x) = C\sqrt{1+x^2}$ **(b)** $y + \dfrac{y^3}{3} = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{4}{3}$ **(c)** $y = C\big(1+x\big)$

(d) $y = -\operatorname{sen} x$ **(e)** $y + \dfrac{y^3}{3} + x - x\ln x = 1$ **(f)** $y = -\ln\big(e^x - xe^x + C\big)$

6. **(a)** $\dfrac{x^2}{2} - 2\,x + y^2 - 2\,y = C$ **(c)** $y(x) = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{(x-2)^2}{2}}$, $I = (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$

7. $y = x - 2$ definida no intervalo $I = (-\infty, 1)$.

8. (a) $x^2 - y^2 - 4\,y = C$, família de hipérboles (complete o quadrado para para ver isto).

(b) $y = \sqrt{x^2 + 4} - 2$, $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

(c) $y = -2 - \sqrt{x^2 - 8}$, $I = (-\infty, -\sqrt{8})$

(d) $y = -x - 2$, $I = (-\infty, 0)$

9. (a) $y = \dfrac{4}{C - x^4}$, $y = 0$

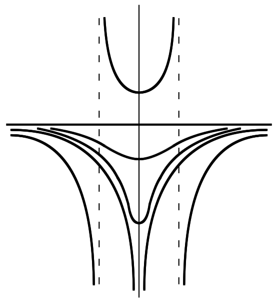
(b) $y = \dfrac{4}{1 - x^4}$, $I = (-1, 1)$

(c) $y = \dfrac{4}{1 - x^4}$, $I = (-\infty, -1)$

(d) $y(x) = -\dfrac{4}{3 + x^4}$, $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

(e) $y(x) = 0$, $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

No gráfico abaixo estão representadas algumas soluções. Através de cada ponto do plano passa uma e somente uma solução. Identifique as expressões encontradas ao lado com com alguma curva do gráfico.



10. (a) $-\dfrac{1}{2\,(y-1)^2} = \sqrt{1 + x^2} + C$, $y = 1$

(b) $y(x) = 1 - \left(3 - 2\sqrt{1 + x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $I = \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

(c) $y(x) = 1$, $I = \mathbb{R}$

(d) $y(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1 + x^2}}}$, $I = \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

(e) $y(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{6 - 2\sqrt{1 + x^2}}}$, $I = (-2\sqrt{2}\,, 2\sqrt{2}\,)$

11. (a) $y(x) = \left(\dfrac{9}{4} - 2(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $I = \left(-\dfrac{\sqrt{17}}{8}\,, \dfrac{\sqrt{17}}{8}\right)$

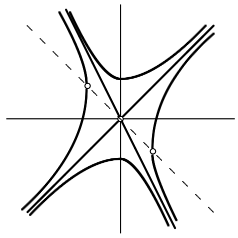
(b) $y = 0$, $I = \mathbb{R}$

12. (a) As isóclinas são retas passando pela origem e as soluções são hipérboles (excluindo os pontos sobre o eixo X).

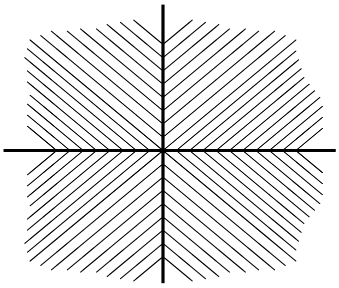
(b) As isóclinas são retas horizontais. Uma solução é uma reta horizontal. Outra solução é a translação vertical de uma unidade de uma exponencial. As demais soluções são as translações horizontais desta última.

(c) As isóclinas são hipérboles e as soluções também são (exceto uma delas, que é uma reta).

(d) As isóclinas são retas passando pela origem. Pelos pontos da reta $y = -x$ não passa nenhuma solução. Algumas soluções estão representadas na figura ao lado.



14.



(a) $y = x + 1\,, \quad I = (0, +\infty)$

(b) $y = -x + 1\,, \quad I = (-\infty, 0)$

(c) $y = -x + 1\,, \quad I = (1, \infty)$

15. $y' = x^2 + y^2$

16. **(a)** $(-\infty, \infty)$

(b) $y'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\,|x|^{-\frac{1}{3}}\,, & \text{se } x > 0 \\ -\frac{2}{3}\,|x|^{-\frac{1}{3}}\,, & \text{se } x < 0 \end{cases}$