LISTA 15

Exercício 1. (a) Para $-1 < a < 1$ e $n \geq 1$, temos que $\int_a^1 P_n(x)dx = \frac{P_{n-1}(a) - P_{n+1}(a)}{2n+1}$. Verifique esse fato diretamente para $n = 1, 2$ e 3 (a partir de uma tabela dos polinômios de Legendre).

(b) Utilizando o item anterior, encontre a tempertatura de regime estacionário para uma esfera condutora de raio b, sabendo que a calota superior $S_1 = \{r = b, 0 < \theta < \beta\}$ é mantida à temperatura constante U_0 e que a parte restante S_2 da superfície da esfera é mantida à temperatura 0.

Exercício 2. Resolva pelo Método de Frobenius

(a) $3xy'' + 2y' + y = 0$

(b) $2x^2y'' - x(x-1)y' - y = 0$

(c) $2xy'' - y' + 2y = 0$

(d) $2\,x^2\,y'' - x\,y' + (x^2+1)\,y = 0$

(e) $4\,x^2\,y'' + 2\,x\,y' - x\,y = 0$

(f) $9\,x^2\,y'' + 2(2\,x+1)\,y = 0$

Exercício 3. Indique a solução geral das seguintes equações:

(a) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{25}\right)y = 0$

(b) $x^2\,y'' + xy' + \left(x^2 - \pi^2\right)y = 0$

(c) $x^2y'' + x\,y' + \left(\lambda^2x^2 - p^2\right)y = 0$ (Sugestão: Fazendo a mudança de varivel $t = \lambda x$, obtenha uma equação de Bessel com respeito a t.)

(d) $4t^2\,y'' + 4t\,y' + (t-9)\,y = 0$ (Sugestão: Fazendo a mudança de varivel $x = \sqrt{t}$, obtenha a equação de Bessel com respeito a x: $x^2\,y'' + xy' + \left(x^2 - 9\right)y = 0$.)

Exercício 4. (O objetivo deste exercício é mostrar que muitas equações diferenciais são na verdade uma forma disfarçada da equação de Bessel.) Escrevendo a equação de Bessel na forma

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0,$$

mostre que com a substituição de variável $z = ax^b$ e $w = yx^c$, para a, b e c constantes, a equação se transforma em

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (2c+1)x\frac{dy}{dx} + \left(a^2b^2x^{2b} + (c^2 - p^2b^2)\right)y = 0.$$

Escreva a solução geral desta última equação em termos de funções de Bessel.

Exercício 5. Use o exercício anterior para mostrar que a solução geral da equação de Airy $y'' + xy = 0$ é

$$y = x^{\frac{1}{2}} \left(C_1 J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + C_2 J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \right).$$

Exercício 6.

(a) Usando as expressões $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ e $J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$, verifique que $J_0'(x) = -J_1(x)$ e $\big(x\, J_1(x)\big)' = x\, J_0(x)$. OBS: Embora isto não seja relevante aqui, é curioso que estas fórmulas lembrem $\big(\cos x\big)' = -\operatorname{sen} x$ e $\big(\operatorname{sen} x\big)' = \cos x$.

OBSERVAÇÃO: Este resultado pode ser generalizado para todo p da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}\left[x^p\, J_p(x)\right] = x^p\, J_{p-1}(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-p}\, J_p(x)\right] = -x^{-p}\, J_{p+1}(x) \quad .$$

Exercício 7. Efetuando as derivações indicadas nas fórmulas da observação do Exercício 6, dividindo por $x^{\pm p}$ e depois somando ou subtraindo as 2 igualdades resultantes, obtenha as fórmulas de recorrência:

$$2\, J_p'(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{2\,p}{x}\, J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)$$

Exercício 8. Verifique que $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\, \operatorname{sen} x$ e $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\, \cos x$.

Sugestão: Use a série de $J_p(x)$ e a série $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$.

Exercício 9. Determine o deslocamento de uma membrana circular $u(r,t)$ de raio unitário, definido por

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \\
&u(1,t) = 0 \\
&u(r,0) = 1 - r^2 \\
&u_t(r,0) = 0
\end{aligned}$$

Exercício 10. Resolva o problema de transmissão do calor de um cilindro circular infinito

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \ , \qquad r < 1, \quad t > 0 \\
&u(1,t) = 0 \qquad \text{para } t > 0 \\
&u(r,0) = f(r) \qquad \text{para } r < 1
\end{aligned}$$

Gráficos de Funções de Bessel

Gráfico de J_0:

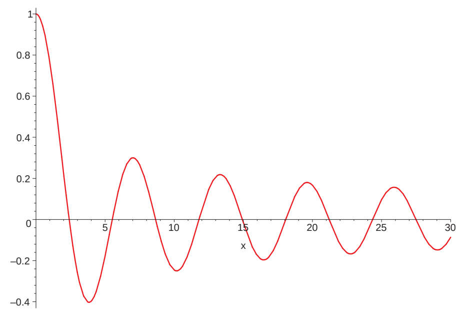
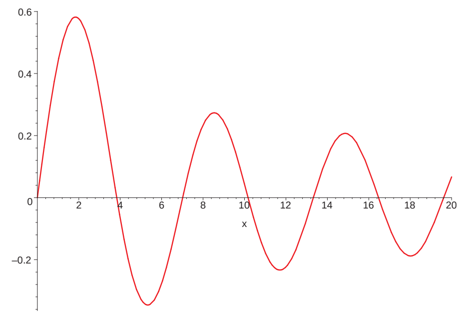


Gráfico de J_1:



RESPOSTAS

1.(b) $$u(r,\theta) = \frac{U_0}{2}\left(1-\cos\beta - \sum_{n=1}^{\infty}\Big[P_{n+1}(\cos\beta)-P_{n-1}(\cos\beta)\Big]\left(\frac{r}{b}\right)^n P_n(\cos\theta)\right)$$

2.(a) $$y_1(x) = 1+\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{n!\,2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}\quad,\quad y_2(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{n!\,4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}\right)$$

(b) $$y_1(x) = x\left(1+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{5\cdot 7}+\frac{x^3}{5\cdot 7\cdot 9}+\cdots\right)\quad,\quad y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)$$

(c) $$y_1(x) = x^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{2}{5}\,x+\frac{2^2}{2!\cdot 5\cdot 7}\,x^2-\frac{2^3}{3!\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\,x^3+\cdots\right) =$$

$$= x^{\frac{3}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{n!\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2\,n+3)}\,x^n\right)$$

$$y_2(x) = 1+2\,x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,2^n}{n!\,1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\,n-3)}\,x^n$$

(d) $$y_1(x) = \sqrt{x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,2^n\cdot 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}\,x^{2\,n}\right)$$

$$y_2(x) = x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,2^n\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}\,x^{2\,n}\right)$$

(e) $$y_1(x) = \sqrt{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\,x^n\right)\quad,\qquad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\,x^n$$

(f) $y_1(x) = x^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{4}{3\cdot 4\cdot}x + \frac{4^2}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot}x^2 - \frac{4^3}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdot}x^3 + \cdots\right)$

$$= x^{\frac{2}{3}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 4^n \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{(3n+1)!}\, x^n\right)$$

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 4^n \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{(3n)!}\, x^n\right)$$

4. $y(x) = C_1 x^{-c} J_p(ax^b) + C_2 x^{-c} J_{-p}(ax^b)$.

9. $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n t) J_0(\alpha_n r)$, onde α_n são as raízes positivas de J_0,

$$A_n = \frac{1}{\|J_0(\alpha_n r)\|^2}\int_0^1 (1-r^2) J_0(\alpha_n r) r dr, \quad \text{com}$$

$$\|J_0(\alpha_n r)\|^2 = \int_0^1 J_0(\alpha_n r)^2 r dr.$$

10. $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) e^{-\alpha_n^2 t}$, onde α_n são as raízes positivas de J_0 e

$$A_n = \frac{1}{\|J_0(\alpha_n r)\|^2}\int_0^1 f(r) J_0(\alpha_n r) r dr, \quad \text{com}$$

$$\|J_0(\alpha_n r)\|^2 = \int_0^1 J_0(\alpha_n r)^2 r dr.$$