MAT 01167 Equações Diferenciais II

LISTA 14

Exercício 1. Encontre os cinco primeiros termos da série de Fourier–Legendre $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x)$ para a função $f(x) = |x|$ no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Exercício 2. Encontre os cinco primeiros termos da série de Fourier–Legendre para

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ x\ , & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Exercício 3. A equação de Hermite é

$$y'' - 2\,x\,y' + 2\,p\,y = 0 \quad , \quad p = \text{const}\ .$$

(a) Encontre a solução geral pelo método de séries de potências.

(b) Se $p = n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, verifique que existe uma solução que é um polinômio de grau n e é único a menos de multiplicação por um escalar. Chama-se de *polinômio de Hermite de grau n* ao polinômio $H_n(x)$ que se obtém impondo a condição de que o termo de maior grau seja $2^n x^n$. Verifique que

$$H_0(x) = 1 \quad , \quad H_1(x) = 2\,x \quad , \quad H_2(x) = 4\,x - 2$$

$$H_3(x) = 8\,x^3 - 12\,x \quad , \quad H_4(x) = 16\,x^4 - 48\,x^2 + 12 \quad , \quad H_5(x) = 32\,x^5 - 160\,x^3 + 120\,x$$

(c) Para os polinômios de Hermite, vale a *fórmula de Rodrigues*

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}\ .$$

Verifique este fato para alguns dos polinômios listados acima, por exemplo, para $H_4(x)$.

Exercício 4. A equação de Tchebyshev é

$$(1 - x^2)y'' - \,x\,y' + \,p^2 y = 0 \quad , \quad p = \text{const}\ .$$

(a) Encontre a solução geral pelo método de séries de potências.

(b) Se $p = n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, verifique que existe uma solução que é um polinômio de grau n e é único a menos de multiplicação por um escalar. Chama-se de *polinômio de Tchebyshev de primeira ordem de grau n* ao polinômio $T_n(x)$ que se obtém impondo a condição de que o termo de maior grau seja $2^{n-1} x^n$. Verifique que

$$T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = \,x \quad , \quad T_2(x) = \,2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4\,x^3 - 3\,x \quad , \quad T_4(x) = 8\,x^4 - 8\,x^2 + 1 \quad , \quad T_5(x) = 16\,x^5 - 20\,x^3 + 5\,x$$

RESPOSTAS

1. $f(x) = |x| = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{8}\,P_2(x) - \dfrac{3}{16}\,P_4(x) + \ldots \quad ,$ para $-1 \le x \le 1\,.$

2. $f(x) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\,P_1(x) + \dfrac{5}{16}\,P_2(x) - \dfrac{3}{32}\,P_4(x) + \ldots \quad ,$ para $-1 \le x \le 1\,.$

3.(a) $y_1 = 1 - \dfrac{2\,p}{2!}\,x^2 + \dfrac{2^2\,p\,(p-2)}{4!}\,x^4 - \dfrac{2^3\,p\,(p-2)\,(p-4)}{6!}\,x^6 + \cdots\cdots$

$$y_2 = x - \frac{2\,(p-1)}{3!}\,x^3 + \frac{2^2\,(p-1)\,(p-3)}{5!}\,x^5 - \frac{2^3\,(p-1)\,(p-3)\,(p-5)}{7!}\,x^7 + \cdots\cdots$$

4. (a) $y_1 = 1 - \dfrac{p^2}{2!}\,x^2 - \dfrac{(p^2(2^2-p^2)}{4!}\,x^4 - \cdots\cdots$

$$y_2 = x + \frac{(1-p^2)}{3!}\,x^3 + \frac{(1-p^2)\,(3^2-p^2)}{5!}\,x^5 + \cdots\cdots$$