MAT 01167 Equações Diferenciais

LISTA 12

Exercício 1. Resolva as equações de Cauchy Euler:

(a) $t^2\, y'' - 2\,t\,y' + 2\,y = t^3 \cos t$

(b) $t^2\, y'' - t\,y' + y = \ln t$

(c) $t^2\, y'' + t\,y' - y = t^3\, e^t$

(d) $t^2\, y'' - 3\,t\,y' + 4\,y = t^2 \ln t$

(e) $t^2\, y'' + \, t\,y' + 4\,y = 0$

Exercício 2.

(a) Mostre que a mudança de variáveis $t = e^x$ transforma a equação de Cauchy–Euler $t^2 \dfrac{d^2y}{dt^2} + a\,t \dfrac{dy}{dt} + b\,y = 0$ em uma equação linear de coeficientes constantes. **Sugestão:** Comece notando que $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{1}{t}$.

(b) Use o anterior e os conhecimentos que temos acerca das equações lineares de coeficientes constantes para formular uma versão do método dos coeficientes a deteminar aplicado à equação

$$t^2\, y'' + a\,t\,y' + b\,y = A\,t^c$$

(c) Aplique o item (b) acima para resolver a equação $2\,t^2\, y'' - 2\,t\,y' + 3\,y = 4\,t^{\frac{4}{3}}$.

Exercício 3. Resolva o problema de Dirichlet no semi-círculo:

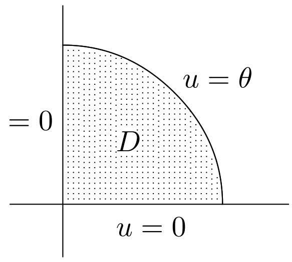
$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\,u_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0\ , \quad D : (\,r < 1\ ,\ 0 < \theta < \pi\,) \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \quad , \quad (\,r < 1\,) \\ u(1,\theta) = \begin{cases} \theta & , \ \text{se}\ \ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & , \ \text{se}\ \ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases} \end{cases}$$

Exercício 4. Resolva o problema de Dirichlet no exterior do disco:

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\,u_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0\ , \quad (\,r > 1\,) \\ u = U_1 \quad , \quad \text{se}\ \ r = 1\ \ \text{e}\ \ 0 < \theta < \pi \\ u = U_2 \quad , \quad \text{se}\ \ r = 1\ \ \text{e}\ \ \pi < \theta < 2\,\pi \\ \mid u \mid \leq M \ \ \text{para algum}\ M \ \ (\text{isto é, } u \text{ é limitada.}) \end{cases}$$

Exercício 5. Resolva o problema de Dirichlet para o setor circular:

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\,u_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0 \ , \quad \text{em} \ \ D: \, r < 1 \ , \ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ u = 0 \quad , \quad \text{nos lados} \quad \theta = 0 \ \ \text{e} \ \ \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ u(1,\theta) = \theta \end{cases}$$



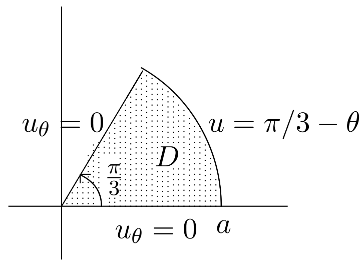
Exercício 6. Ache a temperatura de regime estacionário em um sólido limitado por duas superfícies cilíndricas concêntricas de raios a e b, ($a < b$), sabendo que a superfície $r = a$ é mantida a uma temperatura constante $u(a,\theta) = U_0$ e que a superfície $r = b$ é mantida à temperatura

$$u(b,\theta) = \begin{cases} U_0 \quad , \quad \text{se} \quad 0 < \theta < \pi \\ 0 \quad\ \ , \quad \text{se} \quad \pi < \theta < 2\,\pi \end{cases} .$$

Sugestão: Considere a função $v = u - U_0$.

Exercício 7. Resolva o problema de Dirichlet para o setor circular:

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\,u_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0 \ , \quad \text{em} \ \ D: \, r < a \ , \ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{3} \\ u_\theta = 0 \quad , \quad \text{nos lados} \quad \theta = 0 \ \ \text{e} \ \ \theta = \dfrac{\pi}{3} \\ u(a,\theta) = \dfrac{\pi}{3} - \theta \end{cases}$$



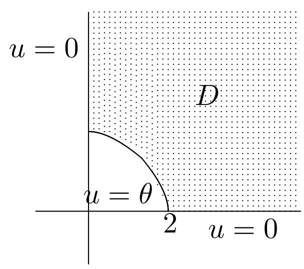
Exercício 8. Resolva o problema de Dirichlet na região definida no semiplano e exterior ao semi-círculo:

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\,u_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0 \ , \quad D: (\, r > 1 \ , \ 0 < \theta < \pi \,) \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \quad , \quad (\, r > 1 \,) \\ u(1,\theta) = f(\theta) \\ \mid u \mid \leq M \quad \text{para algum } M \quad (\text{isto é, } u \text{ é limitada.}) \end{cases}$$

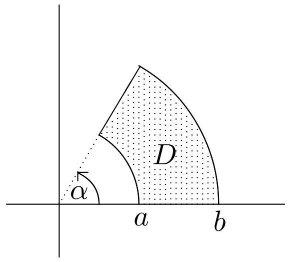
Exercício 9.

Resolva o problema de Dirichlet para o setor circular semi-infinito

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}\,u_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0 \ , \ \text{em} \ \ D: \, 2 < r < \infty \ , \ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ u = 0 \quad , \quad \text{nos lados} \quad \theta = 0 \ \ \text{e} \ \ \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ u(2,\theta) = \theta \end{cases}$$



Exercício 10. Determine a temperatura estacionária em uma barra cuja seção é um "retângulo curvilíneo" com duas faces consistindo de arcos de círculo subintendendo um ângulo α e centrados na origem enquanto que as outras duas faces consistem de segmentos de raios do círculo maior. A face curvilínea $r = b$ é mantida à temperatura constante U_0 enquanto que as demais são mantidas à temperatura 0.



Exercício 11. (Este é um exercício interessante, que usa o caso complexo da EDO de Cauchy–Euler) Resolva o problema anterior supondo que a face retilínea $\theta = \alpha$ é mantida à temperatura $u = U_0$ enquanto que as demais são mantidas à temperatura $u = 0$.

Sugestão: Vai ser necessário resolver um problema de valor de fronteira com a equação de Cauchy– Euler

$$\begin{cases} r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0 \\ \varphi(a) = 0\,, \qquad \varphi(b) = 0 \end{cases}$$

Verifique que ele só tem solução não trivial nos caso $\lambda > 0$. Verifique que a função $\varphi(r) = A\cos(\mu \ln r) + B \operatorname{sen}(\mu \ln r)$ satisfaz $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ somente quando

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\mu \ln a) & \operatorname{sen}(\mu \ln a) \\ \operatorname{sen}(\mu \ln b) & \cos(\mu \ln b) \end{pmatrix} = 0.$$

Mostre que essa condição se cumpre para $\mu = \dfrac{n\pi}{\ln(a/b)}$. Verifique, que no caso $\lambda = \mu^2 > 0$, temos as soluções não triviais

$$\begin{aligned} \varphi_n(r) &= A_n \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \ln a}{\ln(a/b)}\right) \cos\left(\frac{n\pi \ln r}{\ln(a/b)}\right) - \cos\left(\frac{n\pi \ln a}{\ln(a/b)}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \ln r}{\ln(a/b)}\right) \right] \\ &= A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln(a/b)}\right). \end{aligned}$$

Verifique que uma função suave por partes $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pode ser expandida numa série da forma

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \ln r/a}{\ln(a/b)}\right), \qquad (a < r < b)\,.$$

Para isto, basta fazer a mudança de variável $s = \ln\left(\dfrac{r}{a}\right)$. Vamos ter

$$F(s) = f(ae^s) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{\ln(a/b)}\right), \qquad \big(0 < s < \ln(b/a)\big)\,,$$

e $E_n = \dfrac{2}{\ln(b/a)} \displaystyle\int_0^{\ln(b/a)} f(ae^s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{\ln(a/b)}\right) ds\,.$

Exercício 12. Resolva a equação de Poisson

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -2 \quad , \text{ em } \ D: \ x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) = 0 \qquad x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

RESPOSTAS

Exercício 1. **(a)** $y = C_1\, t + C_2\, t^2 - t \cos t$ **(b)** $y = \ln t + 2 + C_1\, t + C_2\, t \ln t$

(c) $y = \left(t - 3 + \dfrac{3}{t}\right) e^t + C_1\, t + \dfrac{C_2}{t}$ **(d)** $y = \dfrac{1}{6}\, t^2\, (\ln t)^3 + C_1\, t^2 + C_2\, t^2 \ln t$

(e) $y = C_1 \cos(2 \ln(t)) + C_2 \operatorname{sen}(2 \ln(t))$

2. (b) Considere a equação algébrica $m\big(m-1\big) + a\, m + b = 0 \quad (\star)$. Se c não é raiz de $(\star)$, então existe uma solução particular da forma $y_p = B\, t^c$. Se c é raiz de $(\star)$ com multiplicidade k, então existe uma solução particular da forma $y_p = B\, t^c \big(\ln|t|\big)^k$.

2. (c) $y = \dfrac{36}{11}\, t^{\frac{4}{3}} + C_1\, t\, \cos\left(\dfrac{\sqrt{2}\, \ln t}{2}\right) + C_2\, t\, \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{2}\, \ln t}{2}\right)$

Exercício 3. $u(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2\, \pi} \operatorname{sen} \frac{n\, \pi}{2} - \frac{(-1)^n}{n} \right) r^n \operatorname{sen} n\, \theta$.

Exercício 4. $u(r,\theta) = \dfrac{U_1 + U_2}{2} + \dfrac{2\big(U_1 - U_2\big)}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{-(2\, n+1)} \operatorname{sen}(2\, n+1)\, \theta}{2\, n+1}$

Exercício 5. $u(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, r^{2\, n} \operatorname{sen} 2\, n\, \theta$

Exercício 6. $u(r,\theta) = U_0 - \dfrac{U_0}{2} \dfrac{\ln \frac{a}{r}}{\ln \frac{a}{b}} + \dfrac{2\, U_0}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{2\, n+1}}{b^{4\, n+2} - a^{4\, n+2}} \left(r^{2\, n+1} - \frac{a^{4\, n+2}}{r^{2\, n+1}} \right) \frac{\operatorname{sen}(2\, n+1)\, \theta}{2\, n+1}$

Exercício 7.

$$u(r,\theta) = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{6\, n-3} \cos 3(2\, n-1)\, \theta$$

Exercício 8.

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{r}\right)^n \operatorname{sen}(n\theta), \qquad \text{onde} \qquad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\, \operatorname{sen}(n\,\theta)\, d\theta$$

Exercício 9.

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{2}{r}\right)^{2n} \operatorname{sen} 2\,n\,\theta$$

Exercício 10. $$u(r,\theta) = \frac{4\,U_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{(2\,n+1)\,\pi/\alpha} - \left(\frac{a}{r}\right)^{(2\,n+1)\,\pi/\alpha}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{(2\,n+1)\,\pi/\alpha} - \left(\frac{a}{b}\right)^{(2\,n+1)\,\pi/\alpha}} \; \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2\,n+1)\,\pi\,\theta}{\alpha}\right)}{2\,n+1}$$

Exercício 11. $$u(r,\theta) = \frac{4\,U_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2\,n+1)\,\pi\,\ln(r/a)}{\ln(b/a)}\right)}{2\,n+1} \; \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{(2\,n+1)\,\pi\,\theta}{\ln(b/a)}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{(2\,n+1)\,\pi\,a}{\ln(b/a)}\right)}$$

Exercício 12. $u(r,\theta) = \frac{1}{2}(1-r^2)$