MAT 01167 Equações Diferenciais

LISTA 11

Exercício 1. Resolva pelo método de separação de variáveis o problema abaixo, sobre a transmissão de calor na placa $D: \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$, em que os lados $y = 0$ e $y = b$ estão isolados:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \ , \text{ em } \ D: \ 0 < x < a \ , \ 0 < y < b \\ u(0, y) = u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 0 \\ u(a, y) = y \end{cases}$$

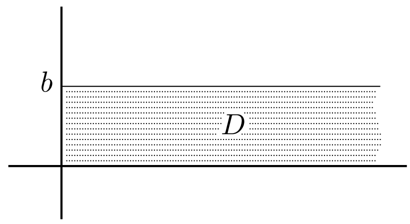
Exercício 2. Resolva o problema de fronteira:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \ , \text{ em } \ D: \ 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < \pi \\ u(0, y) = y, \quad u_x(\pi, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = \pi - x \end{cases}$$

Sugestão: Decomponha a solução $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, onde v e w são soluções de problemas homogêneos com três condições de fronteira homogêneas.

Exercício 3. Resolva o problema de Dirichlet na faixa semi-infinita

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ em } D \\ u_y(x, 0) = u(x, b) = 0 \\ u(0, y) = g(y) \\ u \text{ limitada} \end{cases}$$



sendo $g(y)$ uma função supostamente dada.

Exercício 4. Sabendo que o lado $y = 0$ da placa $0 < x < a \ , \ 0 < y < b$ está isolado, que o lado $x = 0$ é mantido à temperatura $u = 0$ e que os lados $x = a$ e $y = b$ são mantidos à temperatura $u = U_0$, determine a temperatura de regime estacionário $u(x, y)$.

Sugestão: Encontre primeiro a função $w(x, y) = u(x, y) - U_0$.

RESPOSTAS

1. $$u(x,y) = \frac{b\,x}{2\,a} - \frac{4\,b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)^2} \cos\frac{(2\,n-1)\,\pi\,y}{b} \; \frac{\operatorname{senh}\big((2\,n-1)\,\pi\,x/b\big)}{\operatorname{senh}\big((2\,n-1)\,\pi\,a/b\big)}$$

2. $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\frac{2n-1}{2} y \operatorname{sen}\frac{2n-1}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh\big(n(x-\pi)\big) \operatorname{sen} ny \ ,$$

$$\text{onde } B_n = \frac{4}{(2n-1)\operatorname{senh}\dfrac{(2n-1)\pi}{2}} + 8\,\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)^2 \operatorname{senh}\dfrac{(2n-1)\pi}{2}} \quad , \; C_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\cosh(-n\pi)}$$

3. $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\frac{(2n-1)\,\pi\,x}{2b}} \cos\frac{(2n-1)\,\pi\,y}{2b} \quad , \quad \text{onde} \quad B_n = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\,\cos\frac{(2n-1)\,\pi y}{2b}\,dy$$

4. $$u(x,y) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\frac{(2n-1)\,\pi\,(x-a)}{2b} \cos\frac{(2n-1)\,\pi\,y}{2b} \quad ,$$

$$\text{onde} \quad B_n = \frac{2\,(-1)^n\,U_0}{\pi\left(\dfrac{2n-1}{2}\right) \operatorname{senh}\dfrac{(2n-1)\,\pi\,a}{b}}$$