MAT 01167 Equações Diferenciais

LISTA 10

Exercício 1.
Resolva pelo método de separação de variáveis:

(a) $\begin{cases} u_t = k\,u_{xx} \\ u(0,t) = 0\ , \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_t = k\,u_{xx} \\ u(0,t) = 0\ , \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 3\,\mathrm{sen}\frac{\pi x}{L} + 2\,\mathrm{sen}\frac{3\pi x}{L} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_t = k\,u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0\ , \quad u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 2\,\mathrm{sen}\,x \end{cases}$

(d) $\begin{cases} u_t = k\,u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0\ , \quad u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = x \end{cases}$

(e) $\begin{cases} u_t = k\,u_{xx} \\ u(0,t) = 0\ , \quad u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

(f) $\begin{cases} u_t = k\,u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0\ , \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

(g) $\begin{cases} u_{tt} = c^2\,u_{xx} \\ u(0,t) = 0\ , \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = x\,(L-x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} u_{tt} = c^2\,u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0\ , \quad u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \mathrm{sen}\,x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

Sugestão :

1. Procure soluções da forma $u(x,t) = F(x)G(t)$ e obtenha as duas EDO que devem satisfazer $F(x)$, e $G(t)$.
2. Aplique as condições de fronteira.
3. Resolva a EDO espacial com as condições de fronteira encontradas no item anterior.
4. Resolva a EDO temporal.
5. Faça a superposição das soluções.
6. Determine os coeficientes utilizando a condição inicial (as condições iniciais).

Exercício 2.
Resolva os problemas não homogêneos:

(a) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + \gamma \\ u(0,t) = \alpha\ , \quad u(L,t) = \beta \\ u(x,0) = -\dfrac{\gamma}{2}\,x^2 + \dfrac{\beta-\alpha}{L}\,x + \alpha \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_t = u_{xx} - \pi^2\cos\pi x \\ u_x(0,t) = 0\ , \quad u(1,t) = 1 \\ u(x,0) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - \cos\pi x \end{cases}$

Sugestão: Procurar primeiro a temperatura de regime estacionário, isto é, a função $w(x)$ dependendo apenas de x, que satisfaz a equação diferencial e as condições de fronteira (isto é, a temperatura de regime estacionário correspondendo às condições de fronteira dadas). Em seguida, pondo $v = u - w$, resolva o problema correspondente para $v(x,t)$. Finalmente, obtenha u como $u = v + w$.

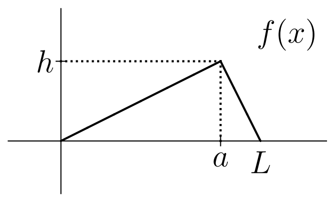
Exercício 3. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \ , \quad u(L,t) = A\,t \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Sugestão: Verifique que a função $w(x,t) = \dfrac{A\,x\,t}{L}$ satisfaz as condições de fronteira e que $\mathcal{L}(w) := w_t - c^2\, w_{xx} = \dfrac{A\,x}{L}$. Em seguida procure uma função $h(x)$ dependendo só de x e satisfazendo $\mathcal{L}(h) = -\dfrac{A\,x}{L}$. Pondo $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t) - h(x)$, resolva o problema correspondente para $v(x,t)$. Finalmente, obtenha $u(x,t)$ como $u = v + w + h$.

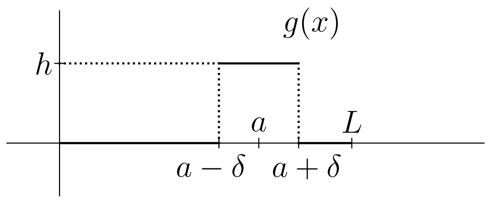
Exercício 4.
Resolva o problema utilizando o resultado do exercício 4a da lista 7

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\, u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$



Exercício 5.
Resolva o problema abaixo, que representa uma corda, inicialmente em repouso, que é percutida por um martelo plano de largura $2\,\delta$, que lhe comunica uma velocidade inicial constante no trecho compreendido entre os pontos $a - \delta$ e $a + \delta$. Utilize o resultado do exercício 4b da lista 7:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\, u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} .$$



Deduza que se o ponto central do martelo coincidir com um nó de um certo harmônico, este não soará. OBS: Este princípio é usado no piano, onde o centro do martelo bate próximo ao ponto $\dfrac{L}{7}$, a fim de eliminar o 7º harmônico, dissonante em relação ao tom fundamental.

Exercício 6.
Resolva o problema de contorno definido por

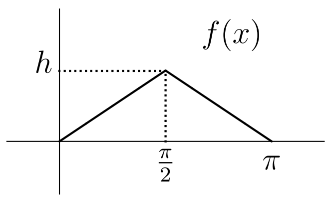
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u & 0 < x < 1 \quad 0 < t < \infty \\ u_x(0,t) = 0 & u_x(1,t) = 0 \quad \text{para} \;\; t > 0 \\ u(x,0) = x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Exercício 7.
Determine a solução do problema de contorno definido pela EDP de Klein-Gordon:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - u(x,t) & \text{para } 0 < x < 1 \;,\; t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(1,t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{para } 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{para } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Exercício 8
Resolva o problema abaixo, que representa oscilações amortecidas em uma corda, levando-se em conta a força de gravidade.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2\, u_t + g \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) + \dfrac{g\, x\, (\pi - x)}{2} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$



Sugestão: Encontre primeiro a função $w(x,t) = w(x)$ dependendo só de x que satisfaz a equação diferencial e as condições de fronteira (isto é, w representa a posição de equilíbrio da corda presa pelas extremidades e sob a ação da gravidade). A seguir, pondo $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, resolva o problema correspondente para $v(x,t)$. Finalmente, obtenha $u(x,t)$ como $u = v + w$.

RESPOSTAS

Exercício 1.

(a) $u(x,t) = \dfrac{2L}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\, e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen}\,(\dfrac{n\pi x}{L})$

(b) $u(x,t) = 3\mathrm{e}^{-\frac{k\pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{L} + 2e^{-\frac{9k\pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen} \dfrac{3\pi x}{L}$

(c) $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,n-1)\,(2\,n+1)}\, e^{-4kn^2 t} \cos\, 2nx$

(d)

$$u(x,t) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,m-1)^2}\, e^{\frac{-k(2m-1)^2 t}{L^2}} \cos\, \frac{(2m-1)\pi}{L} x$$

(e) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{k(2n-1)^2\pi^2 t}{4L^2}} \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\,\pi\, x}{2L}$,

onde $c_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi x}{2L} dx$

(f) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-\frac{k(2n-1)^2\pi^2 t}{4L^2}} \cos \dfrac{(2n-1)\,\pi\, x}{2L}$,

onde $c_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2L} dx$

(g) $u(x,t) = \dfrac{8\,L^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,n+1)^3} \cos \dfrac{(2\,n+1)\,\pi\, c\, t}{L} \operatorname{sen} \dfrac{(2\,n+1)\,\pi\, x}{L}$

(h) $u(x,t) = -\dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,n-1)\,(2\,n+3)} \cos \dfrac{(2\,n+1)\, c\, t}{2} \cos \dfrac{(2\,n+1)\, x}{2}$

Exercício 2.

a. $u(x,t) = -\dfrac{\gamma}{2}\, x^2 + \left(\dfrac{\beta-\alpha}{L} + \dfrac{\gamma\, L}{2}\right) x + \alpha + \dfrac{\gamma\, L^2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}\, e^{-\frac{n^2\,\pi^2\, t}{L^2}} \operatorname{sen} \dfrac{n\,\pi\, x}{L}$

b. $u(x,t) = -\mathrm{cos}\pi x +\, e^{-9\pi^2 t/4} \cos(3\pi x/2)$

Exercício 3.

$$u(x,t) = \frac{A\, x\, t}{L} + \frac{A\, x\big(x^2 - L^2\big)}{6\, c^2\, L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, A\, L^2\, (-1)^{n+1}}{c^2\, n^3\, \pi^3}\, e^{-\frac{c^2\,\pi^2\, n^2\, t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Exercício 4. $u(x,t) = \dfrac{2\,h\,L^2}{\pi^2\,a\,(L-a)} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,\text{sen}\, \frac{n\,\pi\,a}{L} \,\cos \frac{n\,\pi\,c\,t}{L} \,\text{sen}\, \frac{n\,\pi\,x}{L}$

Exercício 5. $u(x,t) = \dfrac{4\,L\,h}{c\,\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,\text{sen}\, \frac{n\,\pi\,a}{L} \,\text{sen}\, \frac{n\,\pi\,\delta}{L} \,\text{sen}\, \frac{n\,\pi\,c\,t}{L} \,\text{sen}\, \frac{n\,\pi\,x}{L}$.

Exercício 6. $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\,e^{-t} - \dfrac{4}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)^2}\, e^{-[(2n-1)^2\pi^2+1]\,t} \cos(2\,n-1)\pi x$

Exercício 7.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\sqrt{(2n-1)^2\pi^2+4}}{2} t + b_n \,\text{sen}\frac{\sqrt{(2n-1)^2\pi^2+4}}{2} t \right) \cos\frac{(2n-1)\,\pi\,x}{2} \quad ,$$

onde

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos\frac{(2n-1)\,\pi\,x}{2}\, dx \ , \quad b_n = \frac{4}{\sqrt{(2n-1)^2\pi^2+4}} \int_0^L g(x) \cos\frac{(2n-1)\,\pi\,x}{2}\, dx$$

Exercício 8. $u(x,t) = \dfrac{g\,x\,(\pi-x)}{2} + \dfrac{8\,h}{\pi^2}\,(1+t)\,e^{-t}\,\text{sen}\,x +$

$$+ \frac{8\,h\,e^{-t}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^2} \left(\cos(\rho_n\,t) + \frac{1}{\rho_n}\,\text{sen}\,(\rho_n\,t) \right) \text{sen}\,\big((2\,n+1)\,x\big),$$

onde $\rho_n = 2\sqrt{n\,(n+1)}$.