Conjuntos Infinitos

Teorema (Cantor) Se A é conjunto qualquer, $\#A \neq \#\mathcal{P}(A)$. Mais precisamente, qualquer $f : A \to \mathcal{P}(A)$ não é sobrejetora.

Consequência. Existe uma herarquia de conjuntos infinitos.

Obs. Existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e o conjunto das sequências formadas por $0's$ e $1's$, Este último é não enumerável pelo método da diagonal de Cantor. Isto dá uma outra demonstração de que $\mathcal{P}$ é não enumerável.

Obs. Usando expansões em base 10 e o método da diagonal de Cantor, pode-se provar que $[0, 1]$ é não enumerável.

Teorema. Todo conjunto infinito contém um conjuno infinito enumerável.

Corolário. Um conjunto A é infinito se e somente se tem a mesma cardinalidade que uma parte própria.

Teorema. A e B enumeráveis $\Longrightarrow A \times B$ enumerável.

Corolário. $A_1, \ldots, a_n$ enumeráveis $\Longrightarrow A_1 \times \ldots A_n$ enumerável.

Observação. É falso para produtos cartesianos enumeráveis. Por exemplo, se $A_n = \{0, 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \cdots$ é o conjunto de todas as sequências formadas por $0's$ e $1's$, que é não enumerável.

Teorema. A_n enumeráveis $\Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ é enumerável.

Aplicação. O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Corolário. Existem números transcendentes.

Obs. Usando expansão em base 2, temos bijeção entre $[0, 1)$ e o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(a_n) | a_n \in \{0, 1\}, \forall k,\ \exists j > k \text{ t.q. } a_j = 1\}$$

$\mathcal{E} = \{(a_n) | a_n \in \{0, 1\}, \exists k \text{ t.q. } \forall j \geq k,\ a_j = 0\}$ Então $\mathcal{E}$ é enumerável e em consequência, $[0, 1)$ tem a mesma cardinalidade que o conjunto de todas as sequências de $0's$ e $1's$, que é a mesma das partes de $\mathbb{N}$.

Obs. Existe uma bijeção entre $[0, 1)$ e $[0, 1)^2$.

Corpos Ordenados

Corpo
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$

Prop. **(i)** $0 \cdot x = 0$
(ii) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -xy$
(iii) $(-x) \cdot (-y) = xy$
(iv) Lei do cancelamento: $xy = xz$, $x \neq 0 \Longrightarrow y = z$.

Def. Seja K um corpo e seja $1 \in K$. Existem duas alternativas:
(i) $1 + 1 + 1 + \cdots + 1$ são todos distintos ou
(ii) Existem $n \neq m$ naturais tais que

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{m \text{ vezes}}$$

No segundo caso, podemos supor spg $m > n$. Seja $r = m - n$. Então, existe $r \in \mathbb{N}$ t.q.

$$r \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{r \text{ vezes}} = 0.$$

Portanto existem duas possibilidades. Ou $\exists r \in \mathbb{N}$ t.q. $r \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{r \text{ vezes}} = 0$, ou os elementos $n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}}$ são todos distintos. No segundo caso dizemos que K *tem característica* 0. No primeiro caso, seja $p \in \mathbb{N}$ o menor natural t.q. $p \cdot 1 = 0$. Dizemos que K *tem característica* p.
Prop. A característica de um corpo ou é 0 ou é um número primo.

Dem: Basta notar que $(nm) \cdot 1 = (n \cdot 1) \cdot (m \cdot 1)$ e usar a lei do cancelamento.

Def. Um corpo ordenado é uma par (K, P), onde K é um corpo e $\emptyset \neq P \subseteq K$ satisfaz:
(i) $x, y \in P \Longrightarrow x + y \in P$ e $xy \in P$.
(ii) Tricotomia: $\forall x \in P$ vale uma e somente uma das condições: $x \in P$, $-x \in P$ ou $x = 0$.

Def. Se K é corpo ordenado, dizemos que $x < y$ se $y - x \in P$.

Exemplo. $K = \mathbb{Q}$ e $P = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Prop. Todo corpo ordenado tem característica 0. Todo corpo ordenado contém uma cópia de $\mathbb{N}$.

Corolário. K corpo ordenado $\Longrightarrow \mathbb{Q} \subseteq K$. Todo corpo ordenado é infinito.

Prop. Se K é corpo ordenado, então
(i) $x < y$ e $y < z \Longrightarrow x < z$ $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$ (transitividade)
(ii) $x < z$ $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$ (compatibilidade)
(iii) $x < y$, $z > 0 \Longrightarrow xz < yz$ (compatibilidade)
(iv)$\forall x \in K$, $x^2 \geq 0$.

Aplicação. $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado de modo a se tornar um corpo ordenado.

Valor absoluto $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ ou seja, $|x| = \max\{x, -x\}$

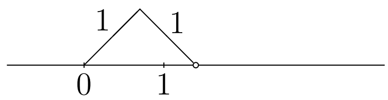
Prop. $|x + y| \leq |x| + |y|$
$|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$
$|xy| = |x| \cdot |y|$.

Def. Intervalos, conjuntos limitados, cota superior e inferior. Exemplos.

Teorema. Seja K um corpo ordenado. São equivalentes:
(i) $\mathbb{N}$ é ilimitado em K;
(ii) $\forall a, b \in K$, com $a > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $na > b$;
(iii) $\forall a \in K$, $a > 0 \Longrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $\dfrac{1}{n} < a$.

Números Reais

Das propriedades do sistema dos números reais, a mais característica é a de ser completo. Intuitivamente, ela diz que o conjunto dos números reais não tem buracos. Começando com os números racionais, associando da maneira usual os números a pontos de uma reta, vamos justificar que o conjunto dos números racionais tem buracos. Construímos um triângulo retângulo com a hipotenusa sobre a reta, catetos de comprimento 1 e



um vértive da base no ponto 0, como mostra a figura. Como $\sqrt{2}$ não é um número racional, ao outro vértice da base não corresponde nenhum número racional. Este argumento mostra que se, sobre a reta tomássemos só pontos associados a números racionais, teríamos um conjunto com buracos. Para tornar o argumento completo vamos provar que o número $\sqrt{2}$ de fato não é racional.

Proposição. O número $\sqrt{2}$ não é racional.

Demonstração: Por absurdo suponhamos que $\sqrt{2}$ seja um racional, isto é, que

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \qquad \text{com } m, n \text{ inteiros.}$$

Podemos ainda supor que na representação acima já foram feitas todas as simplificações possíveis, ou seja, $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$. Elevando ao quadrado, tem-se $m^2 = 2n^2$. Logo m^2 é par. Portanto m é par. Logo, $\exists\, a \in \mathbb{N}$ t.q. $m = 2a$. Segue que $4a^2 = 2n^2$, ou seja, $n^2 = 2a^2$. Portanto n^2 é par. Logo n é par. Então m e n são ambos pares, o que é uma contradição, pois $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$. A contradição veio de fazer a suposição de que $\sqrt{2}$ é racional. Logo $\sqrt{2}$ é irracional.

O objetivo deste capítulo é estudar de que maneira se pode tornar precisa e rigorosa esta idéia de que o conjunto dos números racionais tem buracos.

Propriedade dos Intervalos Encaixantes. Dada uma seqüência $I_n = [a_n, b_n]$ de intervalos fechados tais que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$, existe pelo menos um ponto $c \in \mathbb{R}$ que pertence a todos os intervalos, isto é, c pertence a interseção e todos os intervalos.

Uma maneira equivalente é dizer que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

A propriedade dos intervalos encaixantes expressa a idéia de que $\mathbb{R}$ não tem buracos. De fato, se existisse um buraco, cercando-o cada vez mais de perto por números $a_n < b_n$, obteríamos uma seqüência de intervalos fechados $I_n = [a_n, b_n]$ com interseção vazia.

Observações: 1. No enunciado da propriedade dos intervalos encaixantes os intervalos devem ser fechados. Por exemplo, para os intervalos $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$, tem-se $I_n \supseteq I_{n+1}$, $\forall n$ e no entanto $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.
2. É também essencial que os intervalos sejam limitados, como mostra o seguinte exemplo. Se $I_n = [n, +\infty)$, tem-se $I_n \supseteq I_{n+1}$, $\forall n$ e $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.
3. Vamos ver mais adiante que, se no enunciado da propriedade dos intervalos encaixantes, tivermos a hipótese adicional de os comprimentos dos intervalos $b_n - a_n \to 0$, então podemos garantir a conclusão mais forte de que a interseção $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ é formada por um único ponto.

Aplicação: representação decimal de um número real. A representação decimal de um número real se baseia da propriedade dos intervalos encaixantes, levando em conta já a observação 3 acima. Por exemplo, quando dizemos que a expansão decimal do número $\sqrt{2}$ é 1.4142..., estamos querendo dizer que

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &\in \left[1, 2\right] \\
\sqrt{2} &\in \left[1 + \frac{4}{10}, 1 + \frac{5}{10}\right] \\
\sqrt{2} &\in \left[1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}, 1 + \frac{5}{10} + \frac{2}{10^2}\right] \\
\sqrt{2} &\in \left[1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3}, 1 + \frac{5}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}\right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Em outras palavras, dar a expansão decimal de um número real é caracterizá-lo como a interseção de uma seqüência encaixante de intervalos fechados. A propriedade dos intervalos encaixantes garante que a cada expansão decimal corresponde de fato um número real, e a observação 3 acima garante que este número real é unicamente determinado.

Existe uma outra maneira de formalizar a idéia de que a a reta real não tem buracos, que é talvez menos intuitiva, mas mais importante para o desenvolvimento subseqüente da Análise, e que faz uso da noção de supremo de um conjunto. Para desenvolvê-la precisamos de algumas definições.

Definição. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $b \in \mathbb{R}$ um número real. Dizemos que b é uma *cota superior* para o conjunto A se $x \leq b$, $\forall x \in A$. Se existir cota supeior para o conjunto A dizemos que A é um conjunto *limitado superiormente.*

Exemplos: 1. $\frac{3}{2}$ é uma cota superior para o conjunto $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Logo A é limitado superiormente. Neste caso 1 também é cota superior e, como $1 < \frac{3}{2}$, é uma cota superior melhor.

2. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ não admite cota superior e, portanto, não é limitado superiormente. De fato, uma das propriedades do conjunto $\mathbb{R}$ é a chamada *Propriedade Arquimediana* que diz que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$. A propriedade arquimediana diz simplesmente que o conjunto $\mathbb{N}$ não admite cota superior.

Se b for uma cota superior para o conjunto A então qualquer número real $c > b$ também será uma cota superior para A. Teríamos a informação mais precisa se conhecêssemos uma cota superior de A que fosse a menor dentre todas as cotas superiores. Mas note que não é nada óbvio que esta menor das cotas superiores exista. Se o conjunto $\mathbb{R}$ tivesse buracos, esta menor das cotas superiores poderia não existir, poderia de certa maneira cair em desses buracos.

Exemplo. Seja A o intervalo $A = (0, 1)$. Então 1 e, em conseqüência qualquer $c > 1$, é uma cota superior para A. Por outro lado nenhum $b < 1$ pode ser cota superior, pois dado $b < 1$, tomando o ponto médio $m = \frac{b+1}{2}$, temos

$$m \in A \qquad \text{e} \qquad m > b,$$

provando que $\forall b < 1$, b não é cota superior para a. Logo 1 é a menor de todas as cotas superiores de A.

Definição. Dado um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente e dado $S \in \mathbb{R}$, dizemos que S é o *supremo* de A e anotamos $S = \sup A$ se S for a menor das cotas superiores de A.

Dizer que $S = \sup A$ é o mesmo que dizer que:

(i) $\forall x \in A$, $x \leq S$;

(ii) $\forall x \in A$, $x \leq c \Longrightarrow S \leq c$.

A condição (ii) acima é equivalente a

(ii)′ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in A$ t.q. $S - \varepsilon < x$.

Observação 3. Se o conjunto A possui maior elemento, isto é, se $\exists\, a \in A$ t.q. $\forall x \in A$, $x \leq a$, então $a = \sup A$. Mas existem conjuntos que, apesar de limitados superiormente, não possuem maior elemento. Por exemplo $A = (0, 1)$, ou ainda, $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$. Neste caso, existirá o supremo, mas não pertencerá ao conjunto.

Outra maneira de expressar o fato de que $\mathbb{R}$ é completo é através do Axioma do Supremo.

Axioma do Supremo. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um subconjunto não vazio e limitado superiormente, então $\exists\, S \in \mathbb{R}$ t.q. $S = \sup A$.

Observação 4. A razão de se mencionar que $A \neq \emptyset$ no axioma do supremo é que o conjunto vazio é limitado superiormente mas qualquer número real é uma cota superior para ele, não existindo então a menor de todas.

Observação 5. Na demonstração da proposição abaixo, vamos usar o seguinte fato. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e se vale que

$$a < b + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

então $a \leq b$. A demonstração é por absurdo. Supondo que $a > b$, então, para $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$, deveríamos ter

$$a < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

e portanto, $2a < a + b$ e $a < b$, contradição, pois fizemos a suposição de que $a > b$. Isto prova que $a \leq b$.

Usando o mesmo argumento se prova que se $a, b \in \mathbb{R}$, se $c > 0$ e se vale que

$$a < b + c\,\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

então $a \leq b$.

Observação 6. A propriedade arquimediana pode ser formulada de outra maneira: Para qualquer número real $x > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $0 < \dfrac{1}{n} < x$. De fato, dado $x > 0$, considere o número real $\dfrac{1}{x}$. Pela propriedade arquimediana $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $n > \dfrac{1}{x}$. Então, $0 < \dfrac{1}{n} < x$. Combinando este fato com a observação 5, obtém-se que *se* $a < b + \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *então* $a \leq b$.

Aplicação. Para reforçar a idéia de que o axioma do supremo expressa o fato intuitivo que a reta real não tem buracos, vamos mostrar como ele pode ser usado para provar a existência da raiz quadrada.

Proposição. Dado um número real $b > 0$, existe um único $c > 0$ tal que $b = c^2$.

Demonstração: Dado $b > 0$ real, seja $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0,\ x^2 \leq b\}$. $A \neq \emptyset$, pois $0 \in A$. Vamos mostrar que existe uma cota superior para A. Dividimos em dois casos.

Se $b \leq 1$, então 1 é cota superior para A, pois se $\exists\, x \in A$ t.q. $x > 1$, então $x^2 > 1$, que contradiz que $x^2 \leq b \leq 1$.

Se $b > 1$, então b é uma cota superior para A. De fato, $x \in A \Longrightarrow x^2 \leq b \Longrightarrow x \leq b$, pois se $x > b$, então $x^2 > b^2 > b$.

Em qualquer um dos casos, A é limitado superiormente. Seja $c = \sup A$. Vamos mostrar que $c^2 = b$. Note que $c > 0$, pois se $b \geq 1$, então $1 \in A$, logo $c \geq 1$. Se $0 < b < 1$, então $b \in A$, logo $c \geq b$. Em qualquer um dos casos, $c > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < c$, $\exists\, x \in A$ t.q. $x > c - \varepsilon$. Segue que $b \geq x^2 > (c-\varepsilon)^2$. Então

$$b > c^2 - 2c\,\varepsilon + \varepsilon^2 > c^2 - 2c\,\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Logo $b \geq c^2$.

Para provar a igualdade, basta mostrar que $b > c^2$ não pode ocorrer. Fazemos isto por absurdo, supondo que $b > c^2$ e mostrando que esta suposição leva a uma contradição.

Suponhamos que $b > c^2$. Vamos mostrar que então para $\delta > 0$ suficientment pequeno, teríamos $b > (c+\delta)^2$. Supondo já $\delta \leq 1$,

$$(c+\delta)^2 = c^2 + 2c\delta + \delta^2 \leq c^2 + 2c\delta + \delta = c^2 + (2c+1)\delta$$

Se ainda $0 < \delta < \frac{b-c^2}{2c+1}$, então estará garantido. Portanto, supondo que $b > c^2$, seja $\delta = \min\{1, \frac{b-c^2}{2c+2}\}$. Então $\delta > 0$ e $(c+\delta)^2 < b$. Isto implicaria que $c + \delta \in A$, o que é uma contradição, pois $c = \sup A$.

Fica assim provado que $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.q. $c \geq 0$ e $c^2 = b$. Falta mostrar que este elemento é único. Se $e \geq 0$ e $e^2 = b$, então,

$$0 = c^2 - e^2 = (c-e)(c+e)$$

e portanto $c - e = 0$ ou $c + e = 0$. Mas $c + e$ não pode ser 0, pois c e e são positivos. Logo $c - e = 0$ e $c = e$, provando a unicidade.

Vamos mostrar que a propriedade dos intervalos encaixantes e o axioma do supremo são equivalentes,isto é, cada um deles implica o outro. Costuma-se colocar um deles como hipótese. O outro será um teorema.

O axioma do supremo implica a propriedade dos intervalos encaixantes. Tomando como verdade o axioma do supremo, vamos verificar que vale a propriedade dos intervalos encaixantes. Seja $I_n = [a_n, b_n]$ uma seqüência de intervalos fechados tais que $I_{n+1} \subseteq I_n$, $\forall n$. Precisamos mostrar que a interseção $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.
Seja $B = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. B é não vazio e limitado superiormente, pois b_1 é uma cota superior para B. Pelo axioma do supremo, $\exists\, S \in \mathbb{R}$ t.q. $S = \sup B$. Como S é uma cota superior para B, então $a_n \leq S$, $\forall n$. Por outro lado, como a seqüência é encaixante, $a_m \leq b_n$, $\forall n, m$. Portanto, $\forall n$, b_n é uma cota superior para B. Logo $S \leq b_n$, $\forall n$. Provamos que $a_n \leq S \leq b_n$, $\forall n$, ou seja, $S \in I_n$, $\forall n$. Fica assim provado que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

A propriedade dos intervalos encaixantes implica o axioma do supremo. Tomando como verdade a propriedade dos intervalos encaixantes, vamos verificar que vale o axioma do supremo. Seja $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A$, $x < b$. Escolhemos um elemento qualquer $a \in A$ e tomamos $I_1 = [a, b]$. Em seguida dividimos o intervalo I_1 através de seu ponto médio $c = \frac{a+b}{2}$. Se $[c, b] \cap A \neq \emptyset$, tomamos $I_2 = [c, b]$, caso contrário tomamos $I_2 = [a, c]$. A seguir dividimos I_2 através de seu ponto médio e repetimos o mesmo processo para escolher o intervalo I_3. Deste modo geramos uma seqüência de intervalos fechados $I_n = [a_n, b_n]$ com as propriedades:

(i) I_{n+1} é uma metade de I_n;

(ii) $I_n \cap A \neq \emptyset$;

(iii) A extremidade da direita de I_n é uma cota superior para A;

Pela propriedade dos intervalos encaixantes, $\exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $c \in I_n$, $\forall n$. Vamos mostrar que $c = \sup A$. Precisamos verificar duas condições:

(i) Seja $x \in A$ um elemento qualquer de A. Pela construção acima $x \leq b_n$, $\forall n$. Mas

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

Logo

$$x \leq b_n = a_n + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \leq c + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}\,.$$

Mas se $x \leq c + \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $x \leq c$. Como x pode ser qualquer elemento de A, segue que c é uma cota superior para A.

(ii) Suponhamos que $x \leq d$, $\forall x \in A$. Dado $n \in \mathbb{N}$, como $I_n \cap A \neq \emptyset$, isto é, $I_n = [a_n, b_n]$ contém algum ponto de A, então $a_n < d$. Mas $a_n \leq c \leq b_n = a_n + \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$. Segue que

$$d > a_n \geq c - \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \qquad \forall n.$$

Pela propriedade arquimediana, $d \geq c$.

Definição. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto e $b \in \mathbb{R}$ um número real. Dizemos que b é uma *cota inferior* para o conjunto A se $b \leq x$, $\forall x \in A$. Se existir cota infeior para o conjunto A dizemos que A é um conjunto *limitado inferiormente*.

É claro que se um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tem uma cota inferior b então $\forall c \geq b$, c também é cota interior para A.

Definição. Dado um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente e dado $i \in \mathbb{R}$, dizemos que i é o *ínfimo* de A e anotamos $i = \inf A$ se S for a menor das cotas superiores de A.

Portanto $i = \inf A$ se e somente se:

(i) $\forall x \in A$, $i \leq x$;

(ii) $b \leq x$, $\forall x \in A \Longrightarrow b \leq i$.

Proposição Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um subconjunto limitado inferiormente e não vazio, então $\exists\, i \in \mathbb{R}$ t.q. $i = \inf A$.

Demonstração: Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não vazio, seja

$$-A = \{-x \mid x \in A\}.$$

Então $-A$ é limitado superiormente e não vazio. Pelo axioma do supremo, $\exists\, i \in \mathbb{R}$ t.q. $i = \sup\big(-A\big)$. Vamos verificar que $-i = \inf A$. Temos duas condições a verificar:

(i) Como $i = \sup\big(-A\big)$, temos $y \leq i$, $\forall y \in -A$. Portanto $x \leq i$, $\forall x \in A$. Portanto

$$x \geq -i, \quad \forall x \in A.$$

(ii) Também, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, y_0 \in -A$ t.q. $y_0 > i - \varepsilon$. Mas $x_0 = -y_0 \in A$. Logo $x_0 < -i + \varepsilon$. De (i) e (ii) decorre que $-i = \inf A$.

Observação. O axioma do supremo implica a propriedade arquimediana. De fato, suponhamos válido o axioma do supremo e vamos provar que o conjunto $\mathbb{N}$ não tem cota superior. Por abusurdo, suponhamos $\mathbb{N}$ limitado superiormente. Como $\mathbb{N}$ é não vazio, existiria $s \in \mathbb{R}$ t.q. $s = \sup \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 \in \mathbb{N}$, portanto $n + 1 \leq s$. Logo $n \leq s - 1$, $\forall s \in \mathbb{N}$. Portanto $s - 1$ é uma cota superior de A, o que é uma absurdo, pois s é a menor cota superior de A. Logo $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente e, portanto, vale a propriedade arquimediana.

Portanto 3 propriedades importantes do conjunto dos números reais são a propriedade dos intervalos encaixantes, a propriedade arquimediana e o axioma do supremo. É suficiente tomar a terceira delas como axioma, As outras duas decorrem daí.

Conjuntos Infinitos

Definição. Dizemos que dois conjuntos A e B têm a mesma *cardinalidade* se exitir uma bijeção $f : A \to B$.

Definição. Um conjunto A é dito *enumerável* se A é finito ou se A e $\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade.

Portanto um conjunto infinito A é enumerável quando existir uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$. Neste caso podemos listar os elementos de A. A seqüência $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$ contém todos os elementos de A. Reciprocamente se os elementos de um conjunto A podem ser listados, isto é se existir uma seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ contendo tods os elementos de A sem repetição, definimos uma função $f : \mathbb{N} \to A$ pondo $f(n) = a_n$. Esta função é uma bijeção.

Proposição. A união de cois conjuntos enumerv́eis é enumerável.

Demonstração: Vamos considerar o caso em que ambos os conjuntos são infinitos. Se A e B são enumeráveis, podemos organizar seus elementos em seqüências

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \qquad \text{e} \qquad B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}.$$

Embaralhando as duas listas, construímos uma lista contendo todos os elementos da união

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\}$$

Esta última lista pode conter repetições, se $A \cap B \neq \emptyset$. Eliminando cada elemento que já tenha aparecido anteriormente, obtemos uma lista contendo todos os elementos da união sem repetição. Isto prova que a união $A \cup B$ é enumerável.

A proposição abaixo mostra que com conjuntos infinitos pode ocorrer um fato surpreendente. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ é um subconjunto próprio, aparentemente $\mathbb{Q}$ tem muito mais elementos do que $\mathbb{N}$ no entanto, existe um bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

Proposição. $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Teorema. $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Demonstração: Vamos dar uma demonstração com base na propriedade dos intervalos encaixantes. Por absurdo, suponhamos $\mathbb{R}$ enumerável. Então exitiria uma lista contendo todos os elmentos de $\mathbb{R}$, cada uma deles aparecendo uma única vez, $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Seja I_1 um intervalo fechado tal que $x_1 \notin A_1$, Dividindo I_1 em dois intervalo, através do ponto médio, escolhemos uma I_2 uma metade que não contenha x_2. Então, $x_2 \notin I_2$. A seguir dividimos I_2 através do ponto médio e escolhemos para I_3 uma das metades que ão contenha x_3, ou seja, $x_3 \in I_3$. Repetindo o processo, provamos que $x_n \in I_n$.

I_n assim construídos constituem uma seqüência encaixante de intervalos fechados. Qualquer que seja i, como $x_i \notin A_i$, temos $x_i \notin \bigcap A_n$. Mas $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}$. Logo $\bigcap I_n = \emptyset$, contrariando a propriedade dos intervalos encaixantes. Logo $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Corolário. Todo intervalo aberto (a, b) não é enumerável.

Demonstração: Basta mostra que existe uma bijeção entre qualquer intervalo aberto e $\mathbb{R}$. Dado um intervalo aberto $I = (a, b)$ qualquer, primeiro construímos uma bijeção $g : (a, b) \to (0, 1)$, por $g(x) = \dfrac{x - a}{b - a}$. Em seguida consideramos a bijeção $h : (0, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e finalmente a bijeção $k : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $k(x) = \tan x$. A composta $f = k \circ h \circ g$ é a bijeção $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ desejada.

Conjuntos Densos

Definição. Um subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ é dito *denso* se entre dois reais quaisquer existe sempre um elemento de D. Em símbolos,

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Longrightarrow \exists\, d \in D \text{ t.q. } x < d < y.$$

Pensando em x e y como extremidades de um intervalo aberto (x, y), temos que D é denso se e somente se para todo intervalo aberto I, $I \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

Proposição. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso. Em outras palavras, entre dois reais existe sempre um racional.

Demontração: Sejam x e y reais com $x < y$. Consideremos o número positivo $y - x$. Pela propriedade arquimediana, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q. $0 < \dfrac{1}{n} < y - x$. Considere o conjunto de números inteiros

$$B = \left\{ t \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{t}{n} \leq x \right\}.$$

B é um subconjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ limitado superiormente (nx é uma cota superior) e não vazio e portanto possui um maior elemento b.

Afirmação: $x < \dfrac{b+1}{n} < y$.

De fato, como b é maior elemento de B, então $b + 1 \notin B$. Então $x < \dfrac{b+1}{n}$. Por outro lado, somando as desigualdades $\dfrac{b}{n} \leq x$ e $0 < \dfrac{1}{n} < y - x$, obtém-se $\dfrac{b+1}{n} < y$.
Logo $\exists\, d = \dfrac{b+1}{n} \in \mathbb{Q}$ t.q. $x < d < y$.

1. Suponhamos que $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ e que B seja limitado. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

2. Seja $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$. Prove que $\inf A = 0$.

3. Sejam A e B subconjuntos limitados e não vazios. Defina

$$A + B = \{x + y \mid x \in A \ , \ y \in B\}$$

Prove que $A + B$ também é não vazio e limitado e que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

4. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ subconjunto lmitadoe naão vazio, define-se o diâmetro de a por

$$\operatorname{diam}\big(A\big) = \sup\{|y - x| \, ; \, x, y \in A\}$$

Prove que $\operatorname{diam}(a, b) = b - a$.

5. Sejam A e B subconjntos limitado e não vazios de $\mathbb{R}$ e suponhamos que $x \leq y$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$. Prove que $\sup A \leq \sup B$. Prove que vale a igualdade se e somente se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in A$, $\exists\, y \in B$ t.q. $y - x < \varepsilon$.

6. Dados A e B subconjuntos limitados e não vazios de $\mathbb{R}$, seja $D = \{x - y \mid x \in A \ , \ y \in B\}$. Prove que $\sup D = \sup A - \inf B$.

7. Definição: Um subconjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ é dito um **grupo aditivo** se

(1) $0 \in G$

(2) $x, y \in G \Longrightarrow x + y \in G$

(3) $x \in G \Longrightarrow -x \in G$

Por exemplo, $\mathbb{Z}$, $\{0\}$ e $\mathbb{Q}$ são grupos aditivos.

Sejam $G \subseteq \mathbb{R}$ um grupo aditivo, $G^+ = \{x \in g \mid x > 0\}$ e $a = \inf G^+$.

(i) Prove que se $a > 0$, então $G = \{0, a, -a, 2\,a, -2\,a, 3\,a, -3\,a, \ldots\}$.

(ii) Prove que se $a = 0$, então G é denso.

(iii) Prove que se α é um número irracional, então $G = \{m + n\,\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ é um grupo aditivo denso.

(iv) Use o resultado do item (iii), com $\alpha = 2\,\pi$, para provar que o conjunto dos valores de aderência da seqüência $(\cos n)$ é todo o intervalo $[-1, 1]$.